АНАЛИЗ РИСКА

ПТ, 12.50–16.10
612

21.02.

Алексей Андреевич Кудрявцев

Анализ риска – часть актуарной (страховой) математики, исторически так, хотя методы можно применять и в других областях.

Будет коллоквиум перед зачётом, несколько доп. занятий на задачи.

Коллоквиум ~ как доп. попытка сдать зачёт, зачёт по билетам (как экзамен).

Литература

1) Королёв, Бенинг, Шоргин "Мат. основы теории риска: Учебн. пособие" 2007

2) –॥– 2011.

Будет 3 вопроса на ГОС из этого курса.

Зачёт:

1) Билет

2) Если успешно 1), то вопросы из "серого" = 2 б., из "чёрного" списка = 1 б., задачи ~ 1.5 балла

Занятия до майских праздников.

После опечаток → "плюсики".

Чёрный список вопросов !

1. Случайная величина ξ, заданная на вер. пр-ве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – это отображение $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$, облад. св-вом измеримости: $\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathfrak{B}$

оцифрованное состояние природы попадает в то множество, которое можно себе представить

$(\Omega, \mathcal{F})$

$\xi: \Omega \to \mathbb{R}$, т.ч. $\forall B \in \mathfrak{B}$

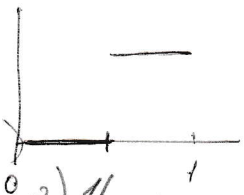
$\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

$\overset{\shortparallel}{\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\}}$

Пример: того, что не явл-ся с.в.

1) $([0,1], \beta_{0,1}, \lambda)$

$\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$



← не случ. вел.

2) ∃ множества $\notin$ σ-алгебре

2. Н.О.Р.С.В. ∃ задано в.п. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

+ можно про в.п.!

1) ξ, η — нез. с.в., если $\mathbb{F}_{\xi,\eta}(x,y) = \mathbb{F}_\xi(x)\cdot \mathbb{F}_\eta(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$

обязательно на одном вер. пр-ве (?)

$\Updownarrow$

$\mathbb{P}(\xi<x, \eta<y) = \mathbb{P}(\xi<x)\cdot\mathbb{P}(\eta<y)$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\mathbb{P}(\xi\in B_1, \eta\in B_2) = \mathbb{P}(\xi\in B_1)\cdot \mathbb{P}(\eta\in B_2)$ $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$

Т.к. $\mathbb{F}_\xi(x)$ не задаёт в.п. и по ней не можем восстановить $\mathbb{P}$ и ξ, то в 1-ом вар-те не обязательно определять на одном в.пр.
P.S. $\mathbb{P}_\xi$ можем восстановить, да

2) ξ, η — одинак. распр. с.в., если $\mathbb{F}_\xi(x) = \mathbb{F}_\eta(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

3. Функция распределения. Осн. св-ва функции распред.

$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\{\omega: \xi(\omega) < x\}) = \mathbb{P}(\xi < x)$, $x\in\mathbb{R}$ $= \mathbb{P}_\xi((-\infty, x))$

1) $\mathbb{F}(+\infty) = 1$, $\mathbb{F}(-\infty) = 0$

2) $\mathbb{F}$ не убыв.

3) $F(x-0) = F(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, т.е. непр. слева

Эти 3 св-ва явл-ся характеристическими, т.е. ∃ в.п. и с.в., для которой ф-ция с такими св-вами явл-ся ф-цией распределения.

4. Математическое ожидание (в общем, дискретном и абс.-непр. случаях).

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

инт-л Лебега

Мат. ожидание — величина $\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x\,d\mathbb{P}_\xi(x) = \int_{\Omega} \xi(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,d\mathbb{F}_\xi(x)$, если интеграл сх-ся (!)

^ интегр. Стилтьеса

$\mathbb{P}_\xi$ опред-ся на $\mathfrak{B}$, поэтому неудобно, для 2-го надо знать явный вид $\xi(\omega)$, обычно не знаем
Самый удобный — третий.

Дискр. случай ξ $\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots \end{array}$ $\mathbb{E}\xi = \sum_i x_i\cdot p_i$, если ряд сх-ся абсолютно

Непр. случай $\exists f_\xi(x)$ — плотность распр., $\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$, если интеграл сх-ся

Пример почему важна абсолютная сходимость в дискретном случае?

$p_k = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$ $\sum_k p_k = 1.$

$x_k = \frac{(-2)^k}{k}$

$p_k \cdot x_k = \frac{(-1)^k}{k}$ - гарм. ряд => сх-ся условно => $\mathbb{E} \nexists$

5. Квантиль распределения. Медиана

← открытый!

q_α - квантиль порядка $\alpha \in (0,1)$, если

$\mathbb{F}_\xi$ - ф.р. $\begin{cases} \mathbb{F}_\xi(q_\alpha - 0) \le \alpha \\ \mathbb{F}_\xi(q_\alpha + 0) \ge \alpha \end{cases}$

$\mathrm{med}\, \xi = q_{1/2}$

6. Отношение Ляпунова. Классическая дробь Ляпунова.

$\mathbb{E}|\xi|^3 < \infty$, $\mathbb{E}\xi^2 \ne 0$.

$L^3(\xi) = \frac{\mathbb{E}|\xi|^3}{(\mathbb{E}\xi^2)^{3/2}}$ - дробь Ляпунова

$\exists\, \mathbb{D}\xi \ne 0$, $L_0^3(\xi) = \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^3}{(\mathbb{D}\xi)^{3/2}}$ - центральная (классическая) дробь Ляпунова

7. Вероятность

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $\mathbb{P}(A) \ge 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

3) $A, B \in \mathcal{F}$, $AB = \varnothing$ => $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ акс. аддитивности

4) $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \in \mathcal{F}$ => $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$ акс. непрерывности

$\Updownarrow$

3') $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, $A_i A_j = \varnothing \ \forall i \ne j$ => $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ σ-аддит.

8. Распределение Пуассона. Пл-ть, хар. функция.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, & x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \underset{0}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

относит. считающей меры

Ещё можно сказать, что $\nexists$ пл-ти, поскольку дискретное

$\varphi_\xi(t) = \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$ ← Pois

~~$\varphi_\xi(t) = e^{ait} e^{-\frac{(t\sigma)^2}{2}}$ ← N~~

$\mathbb{F}(x) = \int\limits_{(-\infty, x]} f_\xi(x)\, d\mu(x)$ $= \sum$

9. Нормальное распред. Пл-ть, хар. функция.

$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}$ (относ. меры Лебега)

$\varphi_\xi(t) = \exp\{ait - \frac{(t\sigma)^2}{2}\} = e^{ait} \cdot e^{-\frac{(t\sigma)^2}{2}}$ $a \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0.$

10. Экспоненциальное распред. Пл-ть, хар. ф-ция.

$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}\{x \geq 0\}$ => $\xi \sim \exp(\lambda),\ \lambda > 0.$

$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$, $t \in \mathbb{R}$

11. Классическое неравенство Берри – Эссеена

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ – н.о.р. с.в., $\mathbb{D}\xi_1 \neq 0$, $\mathbb{E}|\xi_1|^3 < \infty$.

константа Шевцовой – Тюрина

$$\sup_x \left|\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{C_{Ш-Т} L_0^3(\xi_1)}{\sqrt{n}}$$, n = 1, 2, ...

12. Хар. ф-ция (общий, дискр., абс.-непр. случаи)

х.ф. $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mathbb{F}_\xi(x)$

дискр. ξ $\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & \ldots \\ \hline p_1 & p_2 & \ldots \end{array}$ $\varphi_\xi(t) = \sum_n e^{itx_n} \cdot p_n$

абс.-непр. $f_\xi(x)$ – пл-ть => $\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)\, dx$

13. Случайный процесс. 2 сущности.

Опр. 1 $\exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вер. пр-во. Случ. процесс – параметризированное мн-во случ. величин $X_T = \{X_t(\omega)$ – сл. в., $t \in T\}$, определённых на одном вер. пр-ве.

Опр. 2 $\exists A$ – пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – в.п. ф-ций, опред. на T. ∠ σ-алгебру $\mathcal{A}$ подмн-в A.

Случ. процесс – случ. элемент $X(\omega): \Omega \to A : \forall B \in \mathcal{A}$,

$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid \overset{= X(\omega, T)}{X(\omega)} \in B\} \in \mathcal{F}$. – измерим.

14. Борелевская σ-алгебра – это σ-алгебра, порождённая множеством всех открытых подмножеств данного множества

15. Безгранично делимое распределение. 2 определения.

Опр. 1 Случ. вел. ξ – безгр. делима, если $\forall n \in \mathbb{N}$ х. ф. $\varphi_\xi(t) = (\varphi_n(t))^n$,
"имеет безгр. делимое распределение" где $\varphi_n(t)$ – некотор. х. ф.

Опр. 2 ~~если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xi \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi_{n,i}$, $\xi_{n,i}$ – н.о.р.с.в.~~
с.в. ξ имеет безгр. делимое распределение, если $\forall n \in \mathbb{N}$
$\exists \xi_{n,i}$ – н.о.р.с.в., т.ч. $\xi \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi_{n,i}$, $i = \overline{1,n}$.

16. Неравенство Йенсена.

Для выпуклых вверх [вниз] ф-ций φ справедливо

$$\exists \mathbb{E}\xi, \ \exists \mathbb{E}\varphi(\xi): \quad \mathbb{E}\varphi(\xi) \overset{\geqslant}{\leq} \varphi(\mathbb{E}\xi)$$

Как запомнить? $\mathbb{E}\xi^2 \geqslant (\mathbb{E}\xi)^2$, т.к. $\mathbb{D}\xi \geqslant 0$ → $\cup$ – вып. вниз

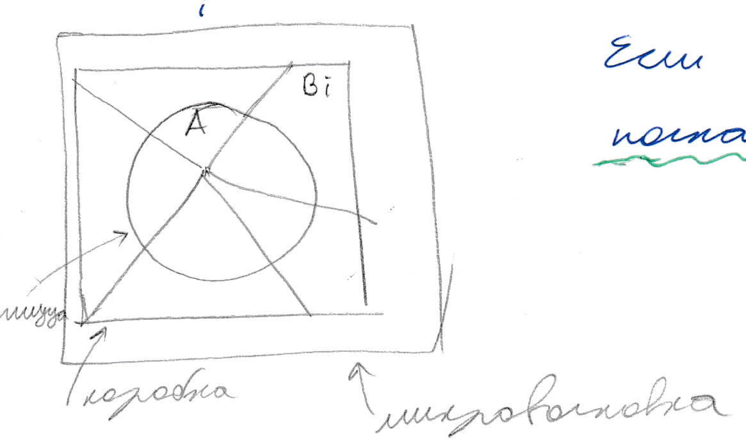
17. Формула полной вероятности (ФПВ)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ вместо этого можно, т.е. A покрывается $\bigcup_i B_i$
$A \subset \bigcup_i B_i$

$\exists \{B_i\}: \ \bigcup_i B_i = \Omega, \ B_i B_j = \emptyset \ \forall i \neq j \quad \mathbb{P}(B_i) > 0$ – вообще не обязательно, но для такого вида нужно, а он удобен

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(AB_i)$$



Если $\bigcup_i B_i = \Omega$ => то группа событий полная

Можно нарезать саму коробку с пиццей, так держать удобнее, а вот саму микроволновку ($\sim\Omega$) нарезать не обязательно! :)

18. Аналог ФПВ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\exists B_i$ - полная группа событий, т.е. $\{B_i\}: \bigcup B_i = \Omega$, $B_i B_j = \emptyset$, $i \neq j$,
$\mathbb{P}(B_i) > 0$.

, Пусть существует $\mathbb{E}\xi$ =>

$$\mathbb{E}\xi = \sum \mathbb{E}(\xi | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{E}(\xi | B_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\mathbb{P}(\xi < x | B_i)$$

20. n-кратная свёртка

$\exists \mathbb{F}(x)$ — ф. р.

$$\mathbb{F}^{*n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{*(n-1)}(x-y) \, d\mathbb{F}(y) \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{F}^{*1}(x) = \mathbb{F}(x)$$

$$\mathbb{F}^{*0}(x) = \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

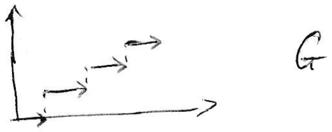
Смысл в чём? $\exists \ \xi \sim H$, $\eta \sim G$, ξ, η — нез.

Δ ф. р. суммы $\xi + \eta$.

1) Пусть η — дискр.:

y_1	y_2	...
q_1	q_2	...

=>



Δ полную группу событий: $\{\eta = y_i\}$

$$\mathbb{P}(\xi + \eta < x) = \sum_i \mathbb{P}(\xi < x - \eta \mid \eta = y_i) \cdot \mathbb{P}(\eta = y_i) =$$

$$= \sum_i \mathbb{P}(\xi < x - y_i | \eta = y_i) \cdot \mathbb{P}(\eta = y_i) \overset{\xi, \eta - \text{нез}}{=} \sum_i \frac{\mathbb{P}(\xi < x - y_i) \cdot \cancel{\mathbb{P}(\eta = y_i)}}{\cancel{\mathbb{P}(\eta = y_i)}} \cdot \mathbb{P}(\eta = y_i) =$$

$$= \sum_i \mathbb{P}(\xi < x - y_i) \cdot \mathbb{P}(\eta = y_i) = \sum_i H(x - y_i) \cdot \mathbb{P}(\eta = y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y) \, dG(y) =$$

$$= (H * G)(x)$$

Δ — диам. разбиения

2) Для произв. η : Δ полную гр. событий $\{y_{i-1} \leq \eta < y_i\}$

$$\mathbb{P}(\xi + \eta < x) = \lim_{\Delta \to 0} \mathbb{P}(\xi < x - \eta \mid y_{i-1} \leq \eta < y_i) \cdot \mathbb{P}(y_{i-1} \leq \eta < y_i) =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_i \mathbb{P}(\xi < x - \tilde{y}_i \mid \eta = \tilde{y}_i, \ y_{i-1} \leq \tilde{y}_i < y_i) \cdot \mathbb{P}(y_{i-1} \leq \eta < y_i) =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_i \mathbb{P}(\xi < x - \tilde{y}_i) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\eta \in [y_{i-1}, y_i))}_{= \mathbb{P}(y_{i-1} \leq \eta < y_i) = G(y_i) - G(y_{i-1}) \xrightarrow[\Delta \to 0]{} dG} = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y) \, dG(y)$$

19. Плотность распределения. Теорема Радона-Никодима

] $\mathbb{F}(x)$ − ф. р. абс.-непр. распред. $\Rightarrow$

$\exists f(x) \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{F}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ ← инт-л Римана

↖ плотность

$\mathbb{F}(x) = \int\limits_{(-\infty,x)} f(y)\,d\lambda(y)$ − интеграл Лебега

↖ мера Лебега

Δ μ вместо λ

Теорема Радона-Никодима.

$(\Omega, \mathcal{F})$ − измер. пр-во.

] μ, ν − σ-конечные меры, $\mu << \nu$; ← доминирующая мера

(т.е. ну $A \in \mathcal{F}$: $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$)

$\Rightarrow \exists f(\omega): \forall A \in \mathcal{F} \quad \mu(A) = \int\limits_{A} f(\omega)\,d\nu(\omega)$

$f(\omega) = \frac{d\mu}{d\nu}(\omega)$

Пл-ть $\exists$ для $\forall$ распред. и $\equiv 1$ (относит-но самой себя) (т.е. подстави в теор. $\nu = \mu$.)

Введение

28.02.

Опр. Риском в некоторой стохаст. ситуации наз-ся совокупность вероятности понести ущерб и значение возможного ущерба.
т.е. распределение вер-тей

Классификация рисков при работе с большими данными:

1) Риск конфиденциальности
2) риск потери данных
3) риск переполнения хранилища
4) риск снижения эффективности больших данных
5) риск формирования неэффективного набора данных
6) риск ошибок больших данных
7) риск ошибок бизнес-модели
8) риск экономической нецелесообразности
9) риск внешнего консультанта
10) риск неготовности к переменам
11) риск мошенничества

Опр. Страхование — процесс, при котором производится компенсация ущерба.

Опр. Страховщик (страховая компания) — организация, занимающаяся страхованием

Опр. Страхователь — лицо, страхующее свои возможные убытки (ущерб).

Опр. Договор страхования (полис) — договор между страховщиком и страхователем, на основе которого производятся выплаты первым последнему при наступлении страхового случая.

Опр. Страховой случай (событие) – инцидент, предусмотренный в договоре страхования, в результате которого страхователь понёс убытки.

Опр. Индивидуальный иск (требование, выплата) – итоговая сумма средств, выплаченная страховщиком по данному договору страхования.

Опр. Убыток – условное значение величины иска при условии, что иск отличен от нуля.

Опр. Страховой портфель – совокупность договоров страхования (обладающих некот. общими признаками)

Опр. Страховая премия – сумма, выплачиваемая страхователем страховщику при заключении договора страхования, зачисленная в страховой фонд.

Опр. Страховой фонд – фонд, предназначенный для покрытия будущих страховых выплат.

Опр. Полный взнос страхователя (брутто-премия) – сумма, выплачиваемая страхователем страховщику при заключении договора страхования.

Опр. Начальный капитал (резерв) – средства, имеющиеся у страховщика в начальный момент времени в страховом фонде.

Опр. Суммарный иск – сумма всех выплат (убытков) страховщика по данному страховому портфелю.

Опр. Разорение – событие, при котором сумма страховых выплат страховщика в некоторый момент времени оказывается больше суммы его начального резерва и собранных страховых премий.

Разорение ≠ банкротство!

Опр. Страховая сумма – максимально возможная величина индивидуального иска по данному договору страхования

Опр. Ставка – (процентная) доля страховой суммы, составляющая страховую премию.

Глава 1. Сравнение рисковых ситуаций и простейшие методы расчёта страховых тарифов.

§1. Понятие об общей теории оценивания риска.

Пусть

n – число страховых полисов в портфеле

S – начальный капитал страховщика

X_i – i-й индив. иск с функцией распр. $F_i(x)$

$X = X_1 + \ldots + X_n$ – общие страховые выплаты.

Опр. Функция распр. общих страховых выплат X

$F(x) = \mathbb{P}(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$

наз-ся распределением риска страховой компании

Пусть $\mu = \mathbb{E}X < \infty$.

Опр. Число $\mu_n = \frac{\mu}{n}$ наз-ся чистой ценой (рисковой премией). Если страховая и рисковая премии равны, то говорят о действии принципа эквивалентности. (страх. фонд в среднем не меняется)

Пусть ν_i – нагрузка (рисковая надбавка), соответствующая i-му полису. Тогда прирост капитала страховщика имеет вид

зависит только от страховщика

$$S + \sum_{i=1}^{n} \nu_i + \mu \equiv R + \mu.$$

зависит только от страхователя

Процесс её нахождения – задача оптимизационная. По сути, актуарий занимается тем, что ищет методы её расчёта.

Опр. Величина R наз-ся свободным резервом. Пара $(R, F(x))$ наз-ся рисковой ситуацией.

Пусть $Y = R + \mu - X$ – конечный капитал страховой компании. Обозначим через $G(y)$ ф-цию распред. Y. Имеем

$$G(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(R + \mu - X < y) = 1 - F(R + \mu - y + 0)$$

Распределение конечного резерва (Y) взаимно однозначно определяется рисковой ситуацией

§2. Сравнение рисковых ситуаций страховых компаний. Функции полезности.

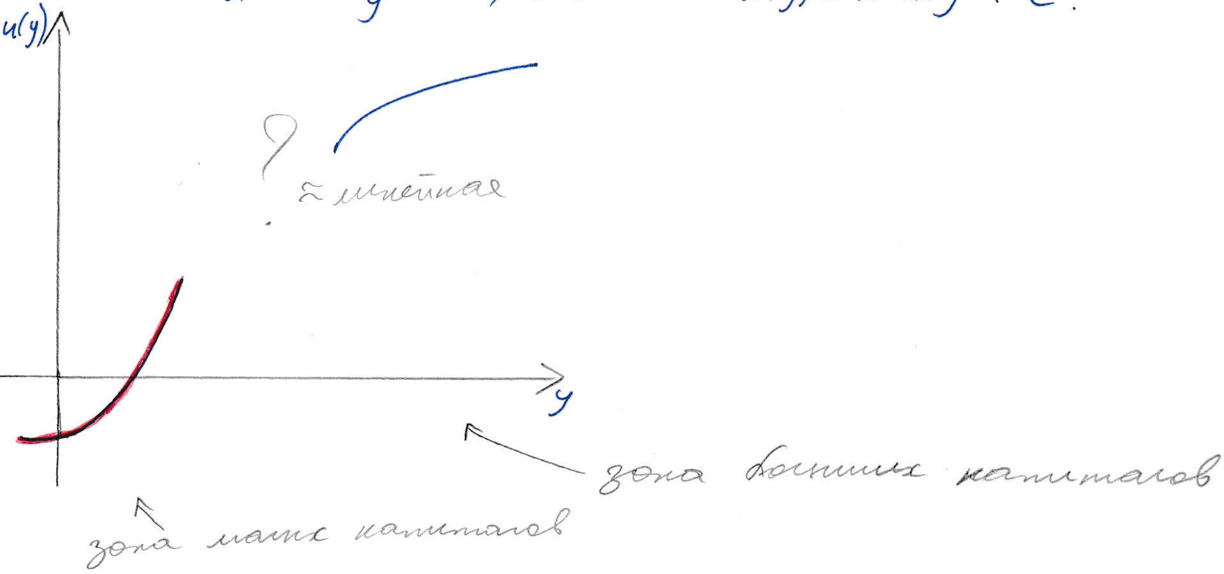
Опр. Функцией полезности капитала y наз-ся действит. функция $u(y)$, имеющая смысл удовлетворения индивида от обладания капиталом y.

Св-ва?

1) "чем денег больше, тем лучше" → для норм. человека строго монотонная (возрастающая)

2) "у богатых штука вверх"
"у бедных штука вниз"
При разном количестве денег одна и та же сумма даёт разное удовлетворение: 10р для нас и для людей на нуле.

Если $d_u(y) = \frac{k\,dy}{y}$, то $u(y) = k \ln y + C$.



Опр. Ожидаемой полезностью капитала Y, где Y - случ. величина, наз-ся усреднённое по распределению Y значение функции полезности $u(Y)$:

$$U(Y) = \mathbb{E}u(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\, dG(y) < \infty.$$

Замечание. Зачастую саму ожидаемую полезность называют ф-цией полезности и рассматривают её как "функцию, с помощью которой можно представить предпочтения на некотором множестве альтернатив".

Будем говорить, что с.в. Z (или её распределение) "лучше" с.в. Y, если ожидаемая полезность Z больше:

$$Z \succ Y \Leftrightarrow U(Z) > U(Y).$$

Замечание. Как правило, рассматривают строго монотонно возр. ф-ции полезности, что отвечает так называемому принципу первого стохаст. доминирования (вероятностный аналог "чем больше, тем лучше").

Замечание. Функция полезности инвариантна относительно сдвигов и растяжений: если $u(y)$ – функция полезности, то

$v(y) = a u(y) + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ также явл-ся ф-цией полезности. Действительно,

$$Z \succ Y \Leftrightarrow V(Z) > V(Y), \quad V(Z) = \mathbb{E}v(Z).$$

$\Rightarrow$ можем центрировать и нормировать ф-ции пол-ти

	$z_1 <$	$z_2 <$	z_3
Z	p_1	p_2	p_3
Y	q_1	q_2	q_3
$u(z_i)$	$0 <$	$\gamma <$	1

$\sum p_i = 1$, $\sum q_i = 1$

Игра 1

$z_1 =$ 0, $1 - p_3 = p_1$ $\quad q_1 = 0$

$z_2 = 2800$ $\quad p_2 = 0$ $\quad q_2 = 1$

$z_3 =$ 5000, $p_3 = 0{,}563$ $\quad q_3 = 0$

Z:

0	5000
p_1	p_3

Y:

2800
1

$z_1 = 0$

$z_2 = 2800$

$z_3 = 5000$

Игра "безобидная" $\Rightarrow$ Y и Z эквивалентны $\Rightarrow$ $Y \not\gtrless Z$

$(1-\gamma, 0, \gamma) \sim (0, 1, 0)$ $\quad \mathbb{E}u(Z) = \mathbb{E}u(Y)$

Поэтому $(1-\gamma) \cdot u(z_1) + 0 + \gamma \cdot u(z_3) = 0 + 1 \cdot u(z_2) + 0$

Игра 2

Цена игры 350.000

Игра A

500.000	1

Игра B

0	0.01
500.000	0.89
2,500,000	0.10

A $\quad$ B

~~6~~ 6 чел. $\quad$ 6 чел.

Цена игры 450.000

C	D
2	10

игра C

0	0.89
500.000	0.11

игра D

0	0.90
2.500.000	0.10

~~Ожид. полезность A~~

~~вып. z_i вер-ть z_i~~

~~$0 \cdot 0$ +~~

$z_1 = 0$

$z_2 = 500.000$

$z_3 = 2.500.000$

знач. в точке z_i вер-ть

$$\mathbb{E}u(A) = \sum u(z_i)\cdot \mathbb{P}(\ldots) = 0\cdot 0 + \gamma\cdot 1 + 1\cdot 0 = \gamma$$

$$\vee$$

$$\mathbb{E}u(B) = 0\cdot 0.01 + \gamma\cdot 0.89 + 1\cdot 0.1 = \gamma\cdot 0,89 + 0.1$$

$\gamma\cdot 0,89 + 0.1 < \gamma$

$0.1 < 0.11\gamma$

$$\mathbb{E}u(C) = U(C) = 0.089 + \gamma\cdot 0.11 + 0 = 0.11\,\gamma$$

$$\wedge$$

$$\mathbb{E}u(D) = U(D) = 0\cdot 0.9 + \gamma\cdot 0 + 1\cdot 0.1 = 0.1.$$

$0.1 > 0.11\gamma$ $\Rightarrow ?!$

$$Z > Y \iff (p_2 - q_2)\gamma + (p_3 - q_3) > 0$$

Если & мн. ф-цию полезности, то люди, выбравшие A и D, реагируют "странно".

$$A > B \iff (1-0.89)\gamma + (0-0.10) > 0 \iff C > D.$$

Задача. Найти ф. п-ти на отрезке [0,1000] и построить её график.

Решение. Без огран. общности будем считать, что $u(0) = 0$, $u(1000) = 1$. & ряд игр (безобидных). Пусть в i-й игре выигрыш X_i принимает значение a_i и b_i с вер-тями $1-p_i$ и p_i соответственно, а x_i - цена игр.

a_i	0	0.5	0	0.7	500	0.8	500	0.9
b_i	1000	0.5	500	0.3	150	0.2	1000	0.1
	$x_1 =$	500	$x_2 =$	150	$x_3 =$	475	$x_4 =$	550
	$u(\overset{500}{x_1}) = 0.5$		$u(\overset{150}{x_2}) = 0.15$		$u(\overset{475}{x_3}) = 0.43$		$u(\overset{550}{x_4}) = 0.55$	

$0\cdot 0.5 + 1\cdot 0.5 = 0.5$

$0\cdot 0.7 + 0.5\cdot 0.3 = 0,15$

$u(150) = 0.15$ $u(500) = 0.5$

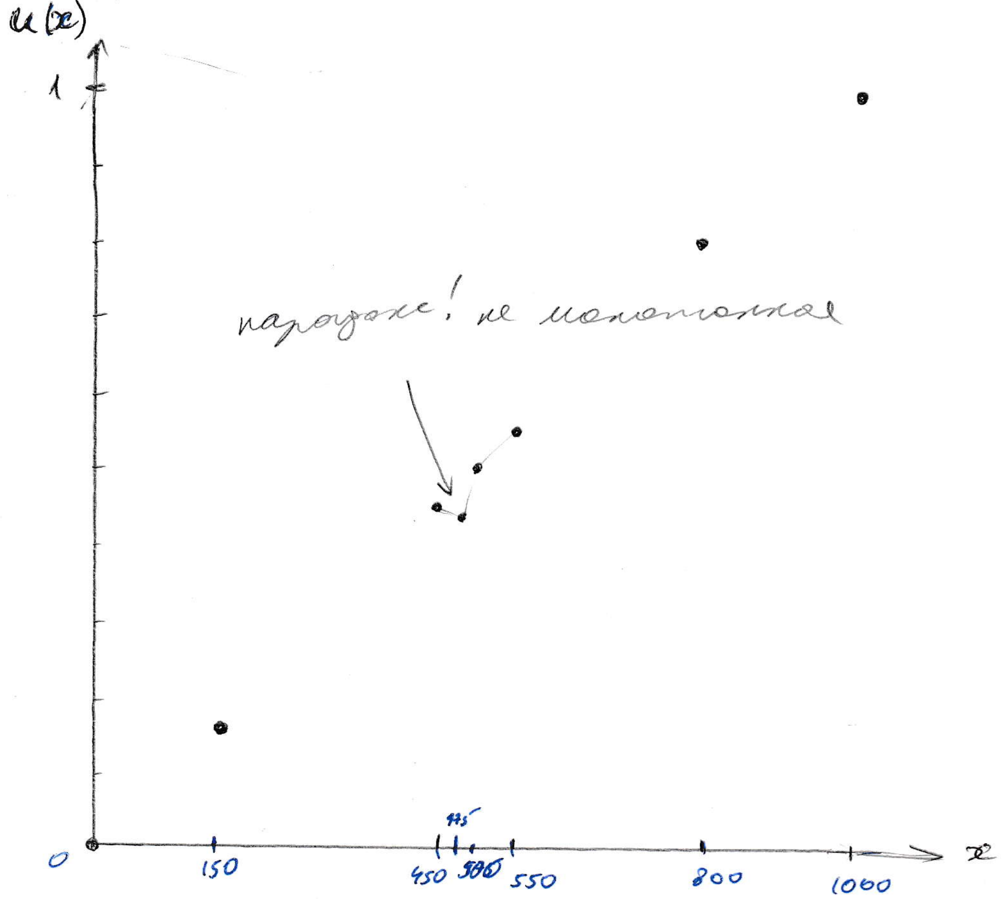
$0.15 * 0.2 + 0.5\cdot 0.8 = 0,43$

a_i	500	$1 - p_5 = 0.4$	150	$1 - p_6 = 0.25$
b_i	1000	$p_5 = 0.6$	550	$p_6 = 0.75$
	$x_5 = 800$, $p_5 = 0.6$		$x_6 = 450$, $p_6 = 0.75$	
	$u(\overset{800}{x_5}) = 0.8$		$u(\overset{450}{x_6}) = 0.45$	

$u(500) = 0.5$ $u(1000) = 1$ $0.15 * 0.25 + 0.55 * 0.75 = 0.45$

$0.4 * 0.5 + 1 \cdot 0.6 = 0.8$

~~x_1~~	~~500~~
~~u~~	~~0.5~~



парадокс! не монотонная

Парадоксы линейной теории полезности

$U(Y) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) p_i$ — линейный относительно вероятностного распределения функционал — зачастую не описывает должным образом выбор индивида.

Пусть $U(Y) = \mathbb{E} Y$. (почему бы не быть проще?)

Кидаем монету. Если герб впервые выпал на n-ом подбрасывании $\Rightarrow$ выигрыш 2^n.

(Идеальная монета подбрасывается до первого выпадения герба)

2^n

$2 >$ 2

$4 >$ 1

$8 >$ ~~3~~4

$16 >$

100 1

Какова плата z за участие в безобидной игре?

$$z \precsim \succsim Y \Leftrightarrow U(z) = U(Y) \Leftrightarrow z = \mathbb{E}Y = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k} \cdot 2^{-k} = +\infty .$$

$\Rightarrow$ "Петербургский парадокс".

06.03.

Нелинейные теории полезности

Пусть $\pi(\cdot)$, $\nu(\cdot)$, $\tau(\cdot)$ - некоторые специальным образом подобранные функции.

Вместо линейного ф-ла $U(Y) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) p_i$

рассматривают ф-лы

$$U(Y) = \sum_{i=1}^{n} \nu(y_i)\pi(p_i)$$

$$U(Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \nu(y_i)\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \nu(y_i)\pi(p_i)$$

$$U(Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \tau(y_i)\pi(p_i)\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \nu(y_i)\pi(p_i)$$

Вид функции полезности страховщика.

Пусть $Y = R + \mu - X$ - конечный капитал страховщика

$U(Y) = \mathbb{E}u(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\,dG(y) = \int_{0}^{+\infty} u(R+\mu-x)\,dF(x)$ - ожидаемая

полезность.

1) Пусть $u(y) \equiv C$ - ф.п. "того, кто умер" = ему всё равно, сколько денег

Тогда $U(Y) = C\int_{0}^{+\infty} dF(x) = C$.

2) Пусть $u(y) = C \cdot \mathbb{1}(y \geq 0)$ - "главное - не иметь долгов", например, школа/университет, т.е. бюджетные предприятия, которые не занимаются прибылью

Тогда $U(Y) = C\int_{0}^{R+\mu} dF(x) = C \cdot F(R+\mu) = C \cdot \mathbb{P}(X < R+\mu)$, т.е. вер-ть неразорения.

3) Пусть $u(y) = ay + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

Тогда $U(Y) = a\int_{0}^{+\infty}(R+\mu-x)\,dF(x) + b = aR + b$, т.к. $\int_{0}^{+\infty} x\,dF(x) = \mu$

$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty}(\mu - x)\,dF(x) = 0.$

4) схематично в общем случае:

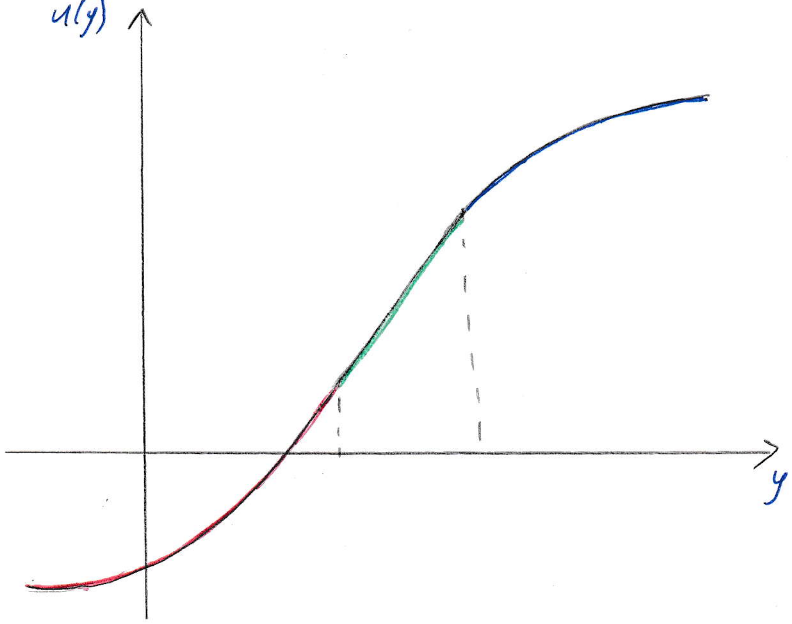


схема разумной ф. и.

§3. Общие принципы выбора страховых премий (тарифов)

Пусть

S – начальный капитал страховщика

$u(y)$ – ф.п. полезности страховщика, $\bar{u}(y)$ – ф.п. страхователя

n – объём портфеля

X_i – i-й индивид. иск

$X = X_1 + \ldots + X_n$ – суммарное страх. требование

I – нач. капитал страхователя

d – цена страхового полиса

$D = nd$ – суммарный страховой взнос

Страховщик согласится страховать, если

$$\mathbb{E}\, u(S+D-X) \geq u(S)$$

Пусть D^* – наименьшее D, для которого справедливо это неравенство.

Страхователь согласится страховаться, если

$$\bar{u}(I-d) \geq \underbrace{\mathbb{E}\,\bar{u}(I-X_1)}_{\text{ожид. полезность, если он не застрахуется}}$$

Пусть d^* – наибольшее из d, для которых справедливо это нер-во.

Если $\bar{u}(x)$ вып. вверх, то есть для любых $\alpha \in (0,1)$, x_1, x_2 справедливо

$$\bar{u}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha \bar{u}(x_1) + (1-\alpha)\bar{u}(x_2)$$

то в силу нер-ва Йенсена

$$\bar{u}(I-d^*) = \mathbb{E}\,\bar{u}(I-X_1) \leq \bar{u}(I-\mathbb{E}X_1)$$

В силу монотонности $\bar{u}(x)$

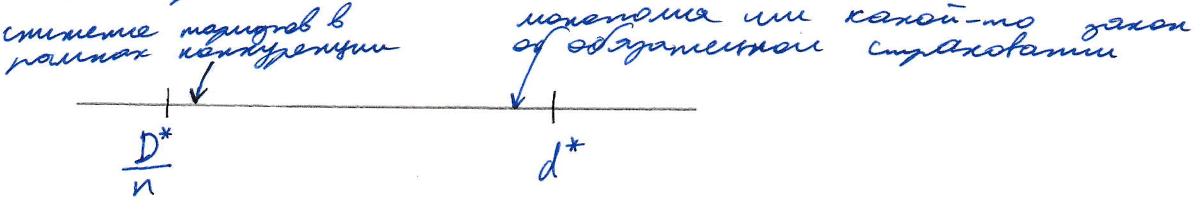
$$I-d^* \leq I-\mathbb{E}X_1$$

$$d^* \geq \mathbb{E}X_1$$

Если у страхователя денег много, то он готов больше заплатить за страхование чем ожидаемые потери

Опр. Говорят, что клиент имеет отвращение к риску, если $d^* \geq \mathbb{E} X_1$ (или $\bar{u}'(x) > 0$, $\bar{u}''(x) \leq 0$). В противном случае говорят о склонности клиента к риску.

Если $D^* > nd^*$, то страхование невозможно. Поэтому рассматриваются только ситуации, где $D^* \leq nd^*$.



Квантильный подход.

Пусть $u(y) = \mathbb{1}(y \in [0, +\infty))$ ~ бюджетная организация

Тогда $U(Y) = \mathbb{P}(X \leq S + nd)$.

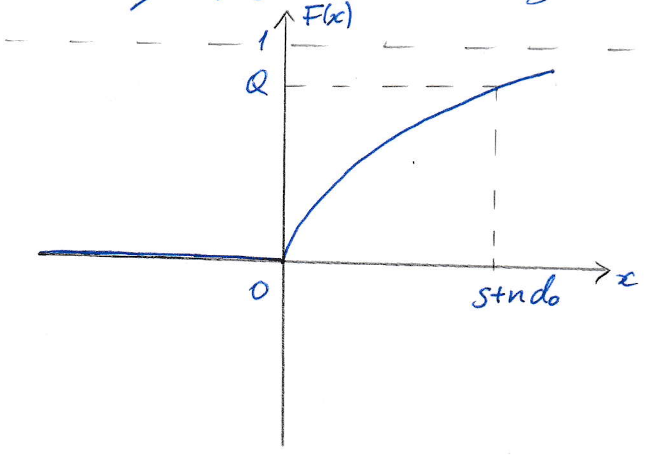
Пусть величина $Q < 1$ близка к единице. Тогда тарифы, удовлетворяющие

$$\mathbb{P}(X \leq S + nd) \geq Q \tag{*}$$

приемлемы для страховщика. Если $d_0 = \min\{d \mid (*)\}$ удовлетворяет нер-ву

$d_0 \leq d^*$,

то страхование возможно.



у нас — квантиль

у экономистов — VAR, т.е. value at risk

§4. Принцип расчёта тарифных ставок.

Пусть

D – суммарный страховой взнос

X – суммарный ущерб

$F(x)$ – распределение риска

порождённый некоторыми внешними условиями

λ – некоторый экзогенный параметр.

Тогда $D = \Psi(F, \lambda)$

1. Принцип ожидаемого значения

$D = (1+\lambda)\mathbb{E}X$, $\lambda \geq 0$ "в среднем растим"

$\lambda = 0$ ⇒ принцип эквивалентности: "в среднем капитал не меняется"

Чем больше страховщик боится (отвр. к риску), тем больше λ.

2. Принцип дисперсии (дисперсионный принцип)

$D = \mathbb{E}X + \lambda \mathbb{D}X$, $\lambda \geq 0$. сильные колебания – плохо

Не очень хорош тем, что размерности разные

$[\mathbb{E}X] =$ рубли, $[\mathbb{D}X] =$ рубли^2 ⇒

3. Принцип стандартного отклонения

$D = \mathbb{E}X + \lambda \sqrt{\mathbb{D}X}$, $\lambda \geq 0$

4. Принцип нулевой полезности

→ так же, в среднем, но не в смысле м.о., а в смысле ожидаемой полезности

Пусть $u(y)$ – функция полезности страховщика с обычными свойствами: $u'(y) > 0$, $u''(y) \leq 0$.

Страховой взнос D определяется как решение уравнения

$$\mathbb{E}u(S + D - X) = u(S)$$

4.1. Экспоненциальный принцип

Для экспоненциальной ф. п. $u(y) = \alpha^{-1}(1 - \exp\{-\alpha y\})$, $\alpha > 0$, последнее ур-е имеет решение

$$D = \alpha^{-1} \ln(\mathbb{E}\exp\{\alpha X\})$$

Д/З – док-ть

5. Обобщённый принцип нулевой полезности.

Пусть нач. капитал S – случ. вел.

Страховой взнос D определяется как решение ур-я

$$\mathbb{E}\, u(S + D - X) = \mathbb{E}\, u(S).$$

Можно показать, что D зависит от совместного распределения с.в. X и S.

5.1. Обобщённый экспоненциальный принцип.

Для экспоненциальной ф.п.

$$D = a^{-1} \cdot \ln \frac{\mathbb{E} \exp\{a(X-S)\}}{\mathbb{E} \exp\{-aS\}},$$

Д/З: проверить

и для малых a

$$D \approx \mathbb{E}X + \frac{a}{2} \mathbb{D}X - a \cdot \mathrm{cov}(X, S)$$

6. Принцип Эшера.

$$D = \frac{\mathbb{E} X \exp\{\lambda X\}}{\mathbb{E} \exp\{\lambda X\}}, \quad \lambda > 0$$

Замечание. Принцип Эшера возникает при минимизации средних потерь страховщика, если ф.п. имеет вид

$$L(x, D) = (D - x)^2 \exp\{\lambda x\}.$$

Какой смысл имеет экзогенный параметр λ?

Пусть $f(x)$ – плотность с.в. X. Имеем

$$D'(\lambda) = \left(\frac{\int_0^\infty x \exp\{\lambda x\} f(x) dx}{\int_0^\infty \exp\{\lambda x\} f(x) dx} \right)'_\lambda = \frac{\left(\int_0^\infty x \exp\{\lambda x\} f(x) dx\right)'_\lambda \int_0^\infty \exp\{\lambda x\} f(x) dx}{\left(\int_0^\infty \exp\{\lambda x\} f(x) dx\right)^2} -$$

$$- \frac{\left(\int_0^\infty \exp\{\lambda x\} f(x) dx\right)'_\lambda \int_0^\infty x \exp\{\lambda x\} f(x) dx}{\left(\int_0^\infty \exp\{\lambda x\} f(x) dx\right)^2} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty x^2 \exp\{\lambda x\} f(x) dx}{\int_0^\infty \exp\{\lambda x\} f(x) dx} - \left(\frac{\int_0^\infty x \exp\{\lambda x\} f(x) dx}{\int_0^\infty \exp\{\lambda x\} f(x) dx} \right)^2 = \mathbb{E} Z^2 - (\mathbb{E} Z)^2 > 0,$$

где с.в. Z имеет плотность $f^*(x) = \dfrac{\exp\{\lambda x\} f(x)}{\int_0^\infty \exp\{\lambda x\} f(x) dx}$, $x > 0$

Таким образом, $D(\lambda)$ - возрастающая функция от λ, параметр λ характеризует "неприятие риска" страховой компанией; при $\lambda=0$ действует принцип эквивалентности $(D = \mathbb{E}X)$.

7. Швейцарский принцип.

Страховой взнос D определяется как решение уравнения

$$\mathbb{E}g(X-\lambda D) = g((1-\lambda)D), \qquad \lambda \in [0,1],$$

где $g(x)$ - веществ. непрерывная функция, облад. свойствами

$$g'(x)>0, \quad g''(x) \geq 0.$$

При $\lambda=0$ действует обобщённый принцип эквивалентности

$$D = g^{-1}(\mathbb{E}g(X)).$$

При $\lambda=1$:

- действует принцип нулевой полезности отн-но ф.и. $u(y) = -g(S-y)$
- действует экспоненциальный принцип, если $g(x) = a^{-1}(\exp\{ax\}-1), \quad a>0$
- действует принцип Эшера, если $g(x) = x\exp\{ax\}, \quad a>0.$

8. Принцип Орлича.

Страх. взнос D определяется как решение ур-я

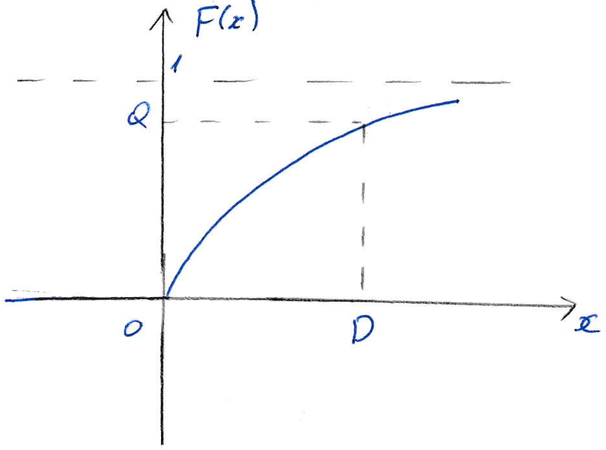
$$\mathbb{E}\rho(XD^{-\lambda}) = \rho(D^{1-\lambda}),$$

где $\lambda \in [0,1]$ и $\rho(x)$ - непрер. строго возрастающая функция. При $\lambda=0$ получается обобщённый принцип экв-ти.

9. Квантильный принцип.

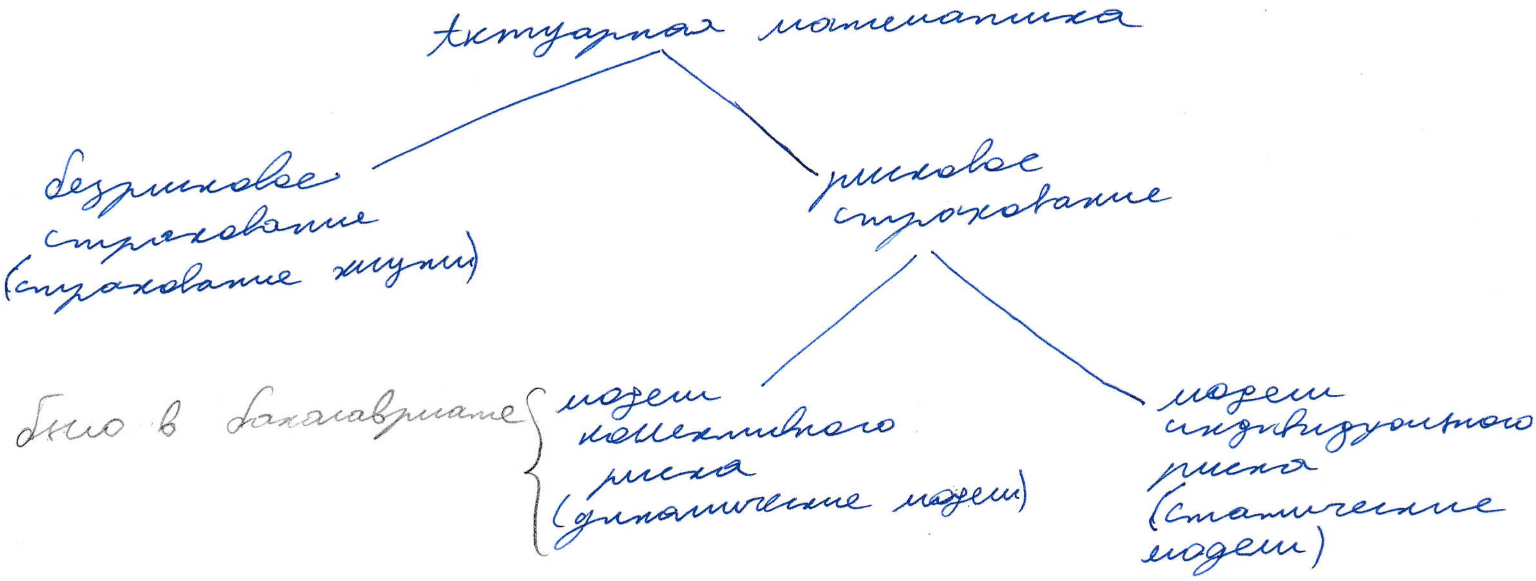
Пусть $F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq y\}, \quad 0<y<1$ - левая y-квантиль распределения риска.

Пусть величина $Q<1$ близка к единице $\Rightarrow$ $D = F^{\leftarrow}(Q)$.


F(x)
1
Q
0
D
x

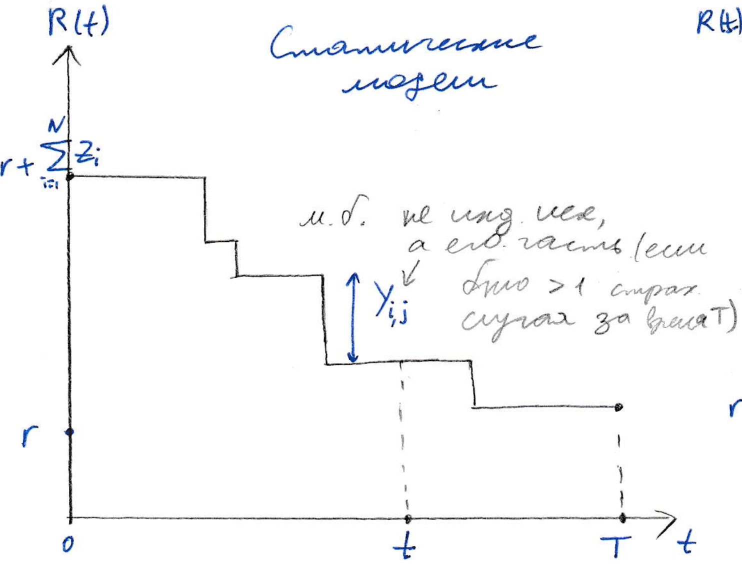
Глава 2. Статические модели риска

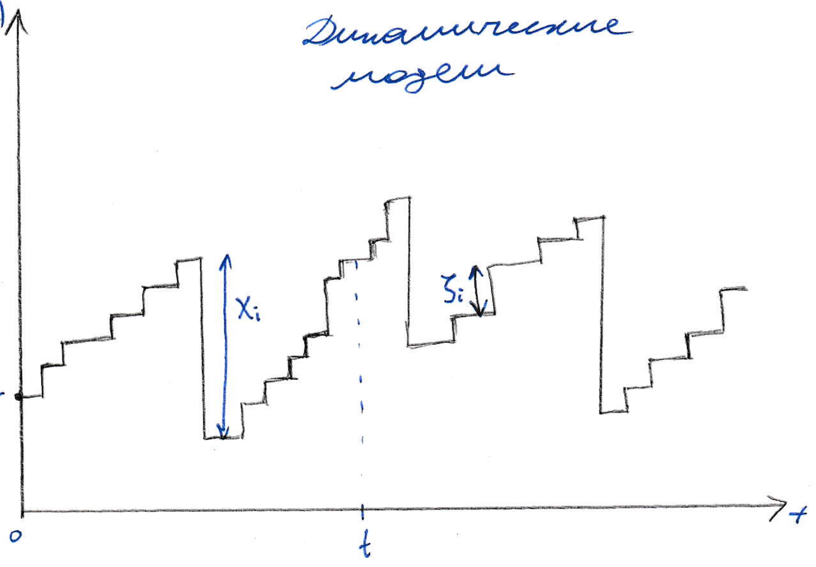
§5. Модели и задачи теории риска



Опр. Модель индивидуального риска, или статическая модель страхования, описывает ситуацию, в которой рассматривается совокупность объектов страхования (страховой портфель), сформированная единовременно, страховые премии собраны в момент формирования портфеля, срок действия всех договоров страхования одинаков, и в течение этого срока происходят страховые события, приводящие к страховым выплатам (искам).

Опр. Модель коллективного риска, или динамическая модель страхования, предполагает, что договоры страхования заключаются страховщиком в моменты времени, образующие некоторый случайный процесс, каждый из договоров имеет свою собственную длительность, и в течение времени действия этого договора могут происходить страховые события, приводящие к убыткам страх. компании (страховщика). Такая модель может рассматриваться как на конечном, так и на бесконечном интервале времени.





Задачи актуарной (страховой) математики

- Вычисление распределения суммарного риска (скорее оценивание)
- Вычисление (или оценка) вер-ти разорения страховщика
- Вычисление (или оценка) страх. премий, обеспечивающих заданную вер-ть разорения
- Оптимизация начального капитала страховщика

Пусть

r – начальный капитал страховщика

N – объём страх. портфеля

Z_j – j-й страховой взнос

Y_j – j-й индивидуальный иск

Тогда

$$R = r + \sum_{j=1}^{N} Z_j - \sum_{j=1}^{N} Y_j$$ – конечный капитал страховщика в статической модели

Y – всегда с.в., остальное может быть с.в. или нет

§6. Классическая асимптотическая формула для страховых премий в статической модели страх.

Пусть

$r=0$

N – детерминир. величина

$Z_j = Z, \quad j=1,\dots,N$

Y_j – н.о.р.с.в.

$\alpha = \mathbb{E}Y_1, \quad \beta^2 = \mathbb{D}Y_1 < \infty$

Тогда конечный капитал страховщика имеет вид

$$R = Z\cdot N - \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

Для достаточно больших N

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j \leq x\right) \asymp \Phi\left(\frac{x-\alpha N}{\beta N^{1/2}}\right)$$

$\asymp$ \asymp "асимптотически равно"

Поэтому для вер-ти неразорения имеем

$$\mathbb{P}(R \geq 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j \leq ZN\right) \asymp \Phi\left(\frac{Z-\alpha}{\beta}\cdot N^{1/2}\right) \geq Q,$$

где величина Q близка к единице.

Соответствующий минимальный страховой взнос имеет вид

$$Z_0 \asymp \alpha + \underbrace{\frac{\beta\,\Phi^{-1}(Q)}{N^{1/2}}}_{>0} \qquad \text{т.е. } Z_0 \geq \alpha$$

средняя выплата

Замечание. Легко показать, что если объём портфеля N имеет пуассоновское распред. с параметром Λ, то минимальный страх. взнос, основанный на нормальной аппроксимации, будет иметь вид

$$Z_0 \asymp \alpha + \frac{(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}\,\Phi^{-1}(Q)}{\Lambda^{1/2}}$$

§7. Факторизационная модель индивидуальных исков

Пусть

S_j - сл. величина, имеющая смысл страх. суммы j-го клиента

Y_j - j-й индивид. иск ($Y_j \le S_j$),

$X_j = \frac{Y_j}{S_j}$ - относительный иск j-го клиента (иск, рассчитанный на единицу страх. суммы)

z - страх. ставка ($0 \le z \le 1$)

$Z_j = z \cdot S_j$ - страх. взнос (премия) j-го клиента

Опр. Статическая модель страхования, в которой индивидуальные иски факторизуемы, т.е.

$$Y_j = X_j \cdot S_j, \qquad j = 1, \dots N,$$

где X_j и S_j - независимые с.в. для $\forall j$, наз-ся факторизационной моделью страхования (Ф-моделью).

Примеры факториз. моделей

Страх. здоровья на производстве

ЛТП	20%	лёгкие телесные повреж.
ТПСТ	50%	- средней тяжести
ТТП	80%	- тяжёлые -"-
—	100%	

пожарник с неб. зарплатой и большой семьей

z	0.01
Z_1	10.000
S_1	1.000.000
X_1	20%
Y_1	200.000

опред-ся финансовым положением

нез-мы

← опред-ся отношением врачей (минздрава)

Дженнифер Лопес

Z	0.01
Z_2	3.000.000
S_2	300.000.000
X_2	80%
Y_2	240.000.000

было важно Z_1

по X_1 нез-мо

↑ уже почти иск (умножить)

было важно S_2

X_2 - брать, слабо

независимо

z	0.01	
C	100.000.000	↗ страховая стоимость объекта, никогда не дойдут больше этого, обычно меньше рыночной → оценили стоимость дома на Рублёвке (наследство)
Z_{13}	10.000	
S_3	1.000.000	
U	5.000.000	← ущерб (оценка его)
X_3	5%	
Y_3	50.000	- выплата

S_3, X_3 нез-мы

Замечание. Везде далее будем предполагать, что страховые суммы S_j одинаково распределены и относительные иски X_j одинаково распределены, что соответствует однородности объектов страхования. Также будем предполагать, что объём портфеля N и случ. векторы (S_j, X_j) независимы в совокупности.

Опр. Будем говорить, что страх. ставка удовлетворяет условию достаточности, если 13.03

- условие средней безубыточности $z \geq \mathbb{E} X_j$
- условие итогового неразорения:

$\mathbb{P}(R \geq 0) \geq Q$ (Q близка к 1).

Предположим, что выполнено только условие средней безубыточности. В этом случае при достаточно большом N

$$\mathbb{P}(R \geq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{N} Y_j - NS\mathbb{E}X_j}{N^{1/2} S (\mathbb{D}X_j)^{1/2}} \leq \frac{zSN - NS\mathbb{E}X_j}{N^{1/2} S (\mathbb{D}X_j)^{1/2}}\right)$$

При нач. капитале $= 0$ $(r=0)$

при $z = \mathbb{E}X_j$:

$$\mathbb{P}(R \geq 0) \asymp \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

Предположим, что выполнено условие итогового неразорения. $\mathbb{P}(R \geq 0) \geq Q$. Рассмотрим следующую модель страхования:

$\exists\ r = 0;$

$N = 1;$

$S_1 = 1;$

$$\begin{cases} Y_1 = 1 & \text{с вер-тью } 1-Q \\ Y_1 = 0 & \text{с вер-тью } Q \end{cases}$$

Тогда при $z = 0$

$$\mathbb{P}(R \geq 0) = \mathbb{P}(z S_1 - Y_1 \geq 0) = \mathbb{P}(Y_1 \leq 0) \geq Q$$

Опр. Будем говорить, что страх. ставка z обладает свойством умеренности, если она является минимальной среди удовлетворяющих некоторому критерию.

Опр. Страх. ставка называется оптимальной ставкой или min допустимой ставкой премии, если она одновременно удовлетворяет условиям умеренности и достаточности

§8. Основные предположения и обозначения в рамках Ф-модели.

Пусть $X \overset{d}{=} X_j \sim F_X$, $S \overset{d}{=} S_j \sim F_S$

$A = \mathbb{E}X$, $B^2 = \mathbb{D}X$, $\mu = \mathbb{E}S < \infty$;

$V = \sqrt{\mathbb{D}S/\mu^2} < \infty$ – коэфф. вариации S

$d = d(z) = z - A$ – рисковая (страховая) надбавка

$H_j = S_j(z - X_j)$ – н.о.р.с.в., имеющие смысл прибыли по j-му полису (если $H_j < 0$, то H_j – убыток);

$H \overset{d}{=} H_j \sim F_H$

$R = r + \sum_1^N Z_j - \sum_1^N Y_j = r + \sum_1^N H_j$ – конечный капитал страховщика

$\mathbb{P}(R < x) = \mathbb{P}(\sum_1^N H_j < x - r)$ – распр. итогового резерва страховщика

$\rho = \frac{r}{\mu}$ – относительный начальный капитал

$h = \mathbb{E}H = \mu d$

$g^2 = \mathbb{D}H = \mathbb{D}S\, d^2 + \mu^2(1+V^2)B^2$ д/з: доказать

$\gamma^2 = \mathbb{E}H^2 = h^2 + g^2$

$\Lambda = \mathbb{E}N$, $M^2 = \mathbb{D}N < \infty$;

$w = V^2 + \frac{M^2}{\Lambda}$

$$\left.\begin{aligned} L(\xi) &= \frac{\mathbb{E}|\xi|^3}{(\mathbb{E}\xi^2)^{3/2}} \\ L_0(\xi) &= L(\xi - \mathbb{E}\xi) \end{aligned}\right\} \text{дроби Ляпунова}$$

θ, θ_i, $\theta(\cdot)$ – неслучайные величины, последовательности и функции

* Задача   ! зачёт

Д-ть, что

$\mathbb{E}R = r + \Lambda h$, $\mathbb{D}R = \Lambda g^2 + M^2 h^2$, N и H_j – нез-мы

(через ФПВ)

Решение:

$$\mathbb{E}R = \mathbb{E}\left(r + \sum_1^N H_j\right) = \overset{\text{число}}{\mathbb{E}r} + \mathbb{E}\sum_1^{\overset{\text{с.в.}}{N}} H_j =$$

$$= \mathbb{E}r + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_1^N H_j \mid N=n\right) \cdot \mathbb{P}(N=n) = [\text{полная гр. событий } \{N=n\}] =$$

$$= r + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\sum_1^n H_j \cdot \mathbb{P}(N=n) = r + \sum_1^n \mathbb{E}H_j \cdot \mathbb{P}(N=n) \;⊜$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_i^N H_j \mid N=n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\mathbb{P}\left(\sum_1^N H_j < x \mid N=n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\mathbb{P}\left(\sum_1^n H_j < x \mid N=n\right) =$$

события независ., поэтому от $N=n$ можно избавиться

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\mathbb{P}\left(\sum_1^n H_j < x\right) = \mathbb{E}\left(\sum_1^n H_j\right)$$

$$⊜\; r + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_1^n \mathbb{E}H_j \cdot \mathbb{P}(N=n) = r + h\left(\sum_0^{\infty} n \, \mathbb{P}(N=n)\right) = r + h(\Lambda) =$$

$$= r + \Lambda h = \mathbb{E}\sum_1^N H_j$$

$$\mathbb{D}R = \mathbb{D}\sum_1^N H_j =$$ (r можно выкинуть для дисперсии)

$$= \mathbb{E}\left(\sum_1^N H_j\right)^2 - \left(\mathbb{E}\sum_1^N H_j\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_1^N H_j\right)^2 - \Lambda^2 h^2$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N H_j\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^N H_j\right)^2 \mid N=n\right) \cdot \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n H_j\right)^2 \mathbb{P}(N=n) =$$

$$= \{\mathbb{E}X^2 = \mathbb{D}X + (\mathbb{E}X)^2\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathbb{D}\left(\sum_{j=1}^n H_j\right)^2 + \left(\mathbb{E}\sum_{j=1}^n H_j\right)^2\right]\mathbb{P}(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^n \mathbb{D}H_j + \sum_{j=1}^n \mathbb{E}H_j\right]\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[n \cdot g^2 + n^2 h^2\right]\mathbb{P}(N=n) =$$

$$= g^2 \mathbb{E}N + h^2 \cdot \mathbb{E}N^2 = g^2 \Lambda + h^2(M^2 + \Lambda^2)$$

$$\mathbb{D}N = \mathbb{E}N^2 - (\mathbb{E}N)^2 \Rightarrow \mathbb{E}N^2 = M^2 + \Lambda^2$$

$$\mathbb{D}R = \cancel{-\Lambda^2 h^2} + g^2\Lambda^2 + h^2 M^2 + \cancel{h^2\Lambda^2} = g^2\Lambda^2 + h^2 M^2$$

§9. Простейшая формула для страх. ставки в условиях Ф-модели

Пусть $r=0$;

N – детерминированная величина

Y_j – факториз. индивидуальные иски

Тогда: $R = \sum_{j=1}^{N} H_j$

Для достаточно больших N:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{1}^{N} H_j \le x\right) \simeq \Phi\left(\frac{x-\mu d N}{g N^{1/2}}\right)$$

Поэтому для вероятности неразорения имеем

$$\mathbb{P}(R \ge 0) \simeq \Phi\left(\frac{\mu d}{g} \cdot N^{1/2}\right) = \Phi\left(\frac{\mu(z-A)\cdot N^{1/2}}{\mathbb{D}S\,(z-A)^2 + \mu^2\cdot(1+V^2)\,B^2}\right) \ge Q,$$

где Q близка к 1.

Соответствующая оптимальная ставка премии имеет вид

$$z_0 \simeq \frac{A + B\,[1+V^2]^{1/2}\,\Phi^{-1}(Q)}{[N - V^2\,\Phi^{-1}(Q)]^{1/2}}$$

Сравнение классической и факторизационной модели

К-модель	Ф-модель
z	zS
α	AS
β^2	B^2S^2
0	V^2

$$z_0 = A + \frac{B(1+V^2)^{1/2}\,\Phi^{-1}(Q)}{[(N-V^2\Phi^{-1}(Q))^2]^{1/2}} = \frac{\alpha}{S} + \frac{\beta\,\Phi^{-1}(Q)}{S\,N^{1/2}} = \frac{z_0}{S}$$

§10. Асимптотические оценки, основанные на нормальной аппроксимации распределения итогового страхового фонда.

Теорема 1.

Предположим, что с.в. R асимптотически нормальна при $\Lambda = \mathbb{E}N \to \infty$, т.е.

$$\delta = \sup_{x} \sup_{0 \le z \le 1} \left| \mathbb{P}\left(\frac{R - \mathbb{E}R}{(\mathbb{D}R)^{1/2}} < x \right) - \Phi(x) \right| \to 0 \quad \text{при } \Lambda \to \infty.$$

Пусть задано некоторое Q, $1/2 < Q < 1$; положим $q = \Phi^{-1}(Q)$. Предположим, что $\omega = \overline{\overline{o}}(\Lambda)$ при $\Lambda \to \infty$.

Тогда

1) если $\exists$ такая абс. пост. $\theta' < 1$, что $\rho \le \theta' q (1+V^2)^{1/2} B [\Lambda - \omega q^2]^{1/2}$, то $\exists$ $\Lambda_0 = \Lambda_0(\theta)$, что при $\Lambda > \Lambda_0$ оптимальная ставка имеет вид

$$z_0 = A + \frac{q(1+V^2)^{1/2} B}{[\Lambda - \omega q^2]^{1/2}} - \frac{\rho}{\Lambda - \omega q^2} + \varepsilon \equiv A + d' + \varepsilon,$$

где $$0 < \varepsilon \le \theta(Q) \frac{(1+V^2)^{1/2} B}{\Lambda^{1/2}} \left[\delta + \frac{\omega}{\Lambda} \right];$$

маленький капитал

(*)

2) если $q(1+V^2)^{1/2} B [\Lambda - \omega q^2]^{1/2} \le \rho \le q (1+V^2)^{1/2} \cdot B \Lambda^{1/2}$, то $\exists$ такое Λ_1, что при $\Lambda > \Lambda_1$ оптимальная страх. ставка имеет вид

средний капитал

$$z_0 = A + \varepsilon,$$ где ε удовлетворяет (*).

3) если $\exists$ такое $\theta'' > 1$, что $\rho \ge \theta'' q (1+V^2)^{1/2} B \Lambda^{1/2}$, то $\exists \Lambda_2 = \Lambda_2(\theta'')$, что при $\Lambda > \Lambda_2$ оптимальная страх. ставка имеет вид $z_0 = A$.

Замечание 1.

Условия теоремы выполнены, в частности, для вырожд. и пуассоновской с.в. N.

Замечание 2.

В силу условий на ? δ и ω остаточный член ε имеет порядок малости $\overline{\overline{o}}(\Lambda^{-1/2})$.

Частные случаи распределения объёма страх. портфеля

Заметим, что:

$d = z - A \le 1 - A \equiv \bar{d}$

$h = \mathbb{E}H = \mu d \le \mu \bar{d}$

$$g^2 = \mathbb{D}H \geq \mu^2(1+V^2)\,B^2 \equiv g_0^2$$

$$\gamma^2 = \mathbb{E}H^2 \geq g_0^2$$

Если $\mathbb{E}S^3 < \infty$, то $\mathbb{E}|H|^3 = \mathbb{E}S^3\,\mathbb{E}|z-X|^3 \leq \mathbb{E}S^3 \cdot \mathbb{E}|H-h|^3 \leq$

$\leq 4\,[\mathbb{E}|H|^3 + h^3] \leq 4\,[\mathbb{E}S^3 + \mu^3 \bar{d}^3]$

$$L(H) \leq I = \frac{\mathbb{E}S^3}{\mu^3(1+V^2)^{3/2}\cdot B^3}$$

$$L_0(H) \leq I_0 = \frac{4\,\mathbb{E}S^3[1+\bar{d}^3]}{\mu^3(1+V^2)^{3/2}\,B^3}$$

<u>Следствие</u>: если N — детерм. с.в. и с.в. S имеет 3-ий момент, то утверждение теоремы 1 справедливо с $\Lambda = N$, $M^2 = 0$, $\omega = V^2$, причём в данном случае

$$d' = \frac{q(1+V^2)^{1/2}B}{[N-V^2q^2]^{1/2}} - \frac{\rho}{N-V^2q^2}, \qquad \delta \leq \Theta_{WT}\frac{I_0}{N^{1/2}}, \text{ где } \Theta_{WT} = 0.47\ldots$$

<u>Следствие</u>: если N имеет распред. Пуассона с параметром Λ и с.в. S имеет 3-ий момент, то утверждение теоремы 1 выполнено с $M^2 = \Lambda$, $\omega = 1+V^2$, причём в данном случае

$$d' = \frac{q(1+V^2)^{1/2}B}{[\Lambda-(1+V^2)q^2]^{1/2}} - \frac{\rho}{\Lambda-(1+V^2)q^2}, \qquad \delta \leq \Theta_{WT}\frac{I}{\Lambda^{1/2}}$$

Модель с конечным источником.

Пусть

- N' — число потенциальных страхователей; (детерминир.)
- договоры со страховщиком заключаются страхователями независимо от других;
- k-й договор заключается с вероятностью s_k и не заключается с вероятностью $1-s_k$.

Тогда объём портфеля

$$N = \sum_{k=1}^{N'} \eta_k,$$

где $\eta_k = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } s_k \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-s_k \end{cases}$

Заметим, что

$$\Lambda = \mathbb{E}N = \sum_{k=1}^{N'} s_k$$

$$M^2 = \mathbb{D}N = \sum_{k=1}^{N'} s_k(1-s_k) < \Lambda$$

и при $\Lambda \to \infty$ справедливо условие $\omega = \bar{o}(\Lambda)$.

Рассмотрим

$$\delta = \sup_x \sup_{0 \le z \le 1} \left| \mathbb{P}\left(\frac{R - \mathbb{E}R}{(\mathbb{D}R)^{1/2}} < x \right) - \varphi(x) \right|.$$

Поскольку η_k и H_k независимы и

$R = r + \sum_{k=1}^{N'} \eta_k H_k$, ← разнораспред., хотя и нез-мы

имеем

$$\delta \le \theta_E \frac{\sum_{k=1}^{N'} \mathbb{E}|\eta_k H_k - s_k h|^3}{(\mathbb{D}R)^{3/2}}$$

← аналог нер-ва Б-Э для разнораспред.

Оценим правую часть последнего нер-ва:

$$\mathbb{E}|\eta_k H_k - s_k h|^3 \le 4\left[\mathbb{E}|\eta_k - s_k|^3 \mathbb{E}|H|^3 + s_k^3 \mathbb{E}|H-h|^3\right] \le$$

$$\le 4\left[s_k(1-s_k)\mathbb{E}|H|^3 + s_k^2 \mathbb{E}|H-h|^3\right],$$

$s_k^2 \geq s_k^3$, т.к. s_k - вер-ть

поскольку $$|\eta_k - s_k|^3 = \begin{cases} (1-s_k)^3 & \text{с вер-тью } s_k \\ s_k^3 & \text{с вер-тью } 1-s_k \end{cases}$$

$\overset{\shortparallel}{\{}$ 1, вер-ть s_k; 0, вер $1-s_k$

и $(1-s_k)^2 + s_k^2 \le 1$.

$$\mathbb{E}|\eta_k - s_k|^3 = s_k \cdot (1-s_k)^3 + (1-s_k) \cdot s_k^3 = s_k \cdot (1-s_k) \underbrace{\left[(1-s_k)^2 + s_k^2\right]}_{\shortparallel} \le s_k \cdot (1-s_k)$$

$$1 - 2s_k + \underbrace{s_k^2 + s_k^2}_{\le 2s_k^2,\ \text{т.к. вер-ть}} \le 1$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{N'} \mathbb{E}|\eta_k H_k - s_k h|^3 \le 4\left[M^2 \mathbb{E}|H|^3 + (\Lambda - M^2)\mathbb{E}|H-h|^3\right] \le$$

$$\le 4M^2 \mathbb{E}S^3 + 16(\Lambda - M^2)\left[\mathbb{E}S^3 + \mu^3 d^3\right]$$

↑

$\mathbb{E}|H|^3 \le \mathbb{E}S^3$

$\mathbb{E}|H-h|^3 \le 4\left[\mathbb{E}S^3 + \mu^3 d^3\right]$

Для случайной величины δ имеем

$$\delta \leq \Theta_E \frac{\sum_{k=1}^{N'} \mathbb{E}|\eta_k H_k - s_k h|^3}{(\mathbb{D}R)^{3/2}} \leq \Theta_E \frac{4M^2 \mathbb{E}S^3 + 16(\Lambda - M^2)[\mathbb{E}S^3 + \mu^3 \bar{d}^3]}{\underset{(\mathbb{D}R)^{3/2} =}{(\Lambda g^2 + M^2(\gamma^2 - g^2))^{3/2}}} \leq$$

$$\leq \Theta_E \frac{4M^2 \mathbb{E}S^3 + 16(\Lambda - M^2)[\mathbb{E}S^3 + \mu^3 \bar{d}^3]}{(\Lambda \mu^2(1+V^2)B^2)^{3/2}} \leq \Theta_E \left[4 \frac{M^2}{\Lambda^{3/2}} \bar{L} + 4 \frac{\Lambda - M^2}{\Lambda^{3/2}} \bar{L}_0\right] \to 0$$

при $\Lambda \to \infty$.

Следствие. Для модели с конечным источником справедливы утверждения теоремы 1.

§ 11. Асимптотические оценки, основанные на уточнённой нормальной аппроксимации распределения итогового страхового фонда

Пусть

$C^3 = \mathbb{E}X^3$;

$\zeta_0 = \zeta_0(d) = \mathbb{E}(H-h)^3/(6g^3)$;

$\zeta = \zeta(d) = \mathbb{E}H^3/(6\gamma^3)$;

$\mathbb{E}S^3 < \infty$;

$$\underset{\uparrow}{u}^3 = \frac{\mathbb{E}S^3}{\mu^3}; \qquad \eta = \frac{u^3[A^3 + 3AB^2 - C^3]}{6(1+V^2)^{3/2}B^3}$$

аналог коэф. вариации

Замечание. при $d \to 0$ ← коэф., определяющий страх. надбавку справедливо $\quad d = Z - A$

$\zeta_0(d) \to \eta, \quad \zeta(d) \to \eta$

Страховщик заинтересован в привлечении клиентов → в услови конкуренции привлекат, так что → стремление к 0 величин страх. надбавки.

Портфель состоит из однородных объектов страх. ⇒ иски одинаковы (по распределению).

Поскольку мы в стат. модели, интенсивность тоже (поскольку она - хар-ка времени, а мы в такой модели как бы не учитывали время, сезонность, ...)

Действительно, при $d \to 0$

$$\zeta_0 \asymp \zeta = \frac{\mathbb{E}H^3}{(6\gamma^3)} \asymp \frac{\overset{u^3}{\mathbb{E}S^3\,\mathbb{E}}(z-X)^3}{6\mu^3(1+V^2)^{3/2}B^3} \asymp \frac{u^3\mathbb{E}(\overset{z}{\overset{\parallel}{d+A}}-X)^3}{6(1+V^2)^{3/2}B^3} \asymp$$

$$\underset{\uparrow}{\asymp} \frac{u^3(A^3 - 3A^3 + 3A\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X^3)}{6(1+V^2)^{3/2}B^3}.$$

поскольку $d \to 0$.

Опр. Распределение F удовлетворяет условию (C) Крамера, если

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\varphi(t)| < 1,$$

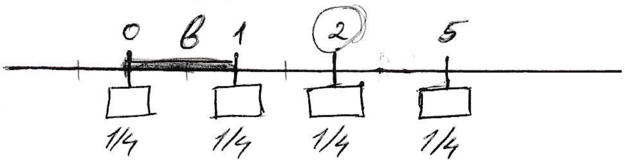
где $\varphi(t)$ - хар. функция распределения F

Замечание. $\forall$ абсол.-непр. распределение удовлетворяет условию (C). Для $\forall$ дискретного распр. условие (C) не выполняется.

Опр. Распределение наз-ся решётчатым, если оно сосредоточено на некотором множестве точек (решётке) P(попасть в такое мн-во)=1
$L = \{a+bk, k\in\mathbb{Z}\}$; величина b наз-ся шагом решётки, если распределение не сосредоточено ни на одной подрешётке решётки L.

Опр. распределение, сосредоточенное на решётке $L=\{a+bk, k\in\mathbb{Z}\}$, шаг которой в несоизмерим с любой из точек решётки (например, a, если $a\neq 0$) называется иррационально решётчатым. Если любая из точек решётки и шаг решётки соизмеримы, то распределение наз-ся рационально-решётчатым.

Задача. 1) построить пример решётчатого распределения
?равномерное → не дискретное → не пойдёт
?вырожденное → ну, наверное, решётчатое с ∀ шагом решётки, но такой себе пример
Равномерное дискретное – распред. с конечным числом атомов, Σ вер-тей $=1$, все вер-ти точек равны.
∀ такое будет решётчатым.

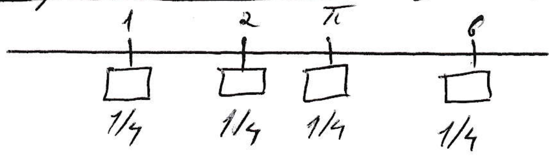


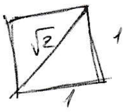
$в = 1$

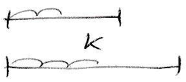
данное распр. сосредоточено на $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ яв-ся решёткой
=> данное распр-ние решётчатое, шаг $в= 1$.

! у подрешётки шаг может быть только больше шага решётки

2) нерешётчатое дискретное

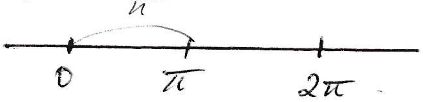






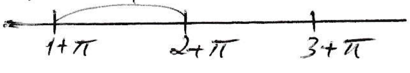
2 отрезка – с длинами n, n наз-ся соизмеримыми, если $\frac{n}{k}\in\mathbb{Q}$

3) ~~иррациональное~~ рационально-решётчатое распред. с иррац. шагом и ирр. узлами



шаг $=\pi$ узлы - иррац.

4) иррац.-решётчатое ~~[illegible]~~ с рац. шагом и иррац. узлами



шаг$=1$ шаг - рац.
узлы - иррац.

Лемма. Пусть $H = S(z - X)$. Если хотя бы одно из распределений F_S или F_X нерешётчатое, то и распределение F_H нерешётчатое;
если хотя бы одно из распределений F_S или F_X удовлетворяет условию (C) Крамера, то распределение F_H также удовлетворяет этому условию, причём оно выполняется равномерно по z:

$$\sup_{z} \limsup_{|t| \to \infty} |\varphi_H(t)| < 1,$$

где $\varphi_H(t)$ — хар. функция с.в. H.

Замечание. На практике распределения с.величин S и X предполагаются либо решётчатыми, либо абс.-непр. Распределения, удовлетворяющие условию (C), включают непрерывную и/или сингулярную компоненту, но в реальных задачах сингулярность и иррациональность не рассматриваются.

Теорема 2. Пусть N — детерминированная величина.
I. Предположим, что хотя бы одно из распред. F_S или F_X не яв-ся решётчатыми. Тогда при $N \to \infty$

$$\mathbb{P}\left(\frac{R - r - Nh}{N^{1/2} g} < x\right) = \Phi(x) + \frac{S_0}{N^{1/2}}(1 - x^2)\underbrace{\varphi(x)}_{\text{пл-ть } N(0,1)} + \bar{\bar{o}}(N^{-1/2})$$

а-ия ряд Тейлора

равномерно по z, x и r.

II. Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X удовлетворяет условию (C), а также что распределение F_S имеет конечный четвёртый момент. Тогда

$$\mathbb{P}\left(\frac{R - r - Nh}{N^{1/2} g} < x\right) = \Phi(x) + \frac{J_0}{N^{1/2}}(1 - x^2)\varphi(x) + w N^{-1},$$

где $|w| \le \underset{\text{неслуч. функция}}{\theta_1}(F_S, F_X)$

Замечание. Можно показать, что случайная сумма одинаково распред. с.в. с невырожденным индексом имеет нерешётчатое распред. <=> распред. слагаемых является нерешётчатым или иррац.-решётчатым

Замечание. Поскольку неслучайный сдвиг z принимает любые значения из $[0,1]$, нельзя сделать вывод о рациональной или иррациональной решётчатости распр-ния с.в. $z-X$, если известно, что распр. X решётчатое.

Лемма Если распределения F_S и F_X решётчатые, причём распр. F_S иррац.-реш, то распр. с.в. $H=S(z-X)$ либо ирр.-реш., либо нерешётчатое.

Замечание Расширение класса рассматриваемых распред. F_S имеет только теоретическое значение, поскольку на практике иррац.-решетчатые распр. страх. сумм не встречаются.

Теорема 3. Пусть N имеет распр. Пуассона с параметром Λ.

I. Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X не явл-ся решётчатым, или что распр. F_S явл-ся иррац.-решетч. т.е. условие что резерв нерешётч.

Тогда при $\Lambda\to\infty$

$$\mathbb{P}\left(\frac{R-r-\Lambda h}{\Lambda^{1/2}\gamma}<x\right)=\Phi(x)+\frac{\mathcal{J}}{\Lambda^{1/2}}(1-x^2)\varphi(x)+\bar{\bar{o}}(\Lambda^{-1/2})$$

равномерно по z, x и r.

II. Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X удовлетв. условию (C), а также что распр. F_S имеет конечный четвёртый момент.

Тогда

$$\mathbb{P}\left(\frac{R-r-\Lambda h}{\Lambda^{1/2}\gamma}<x\right)=\Phi(x)+\frac{\mathcal{J}}{\Lambda^{1/2}}(1-x^2)\varphi(x)+\omega\Lambda^{-1},$$

где $|\omega|\le\Theta_2(F_S,F_X)$.

Теорема 4. Пусть N – детерминированная величина; задано некоторое Q, $1/2 < Q < 1$; положим $q = \Phi^{-1}(Q)$,
$\xi = q + \eta(1-q^2)/N^{1/2}$, $n = N - \eta^2 w = N - \eta^2 V^2$.

I. Предположим, что хотя бы одно из распр. F_S или F_X не явл-ся решётч. Тогда

1) если $\exists$ такая абсолютная постоянная $\Theta' < 1$, что

маленький капитал

$$\rho \le \Theta' \xi (1+V^2)^{1/2} B n^{1/2},$$

$\nwarrow$ относительный нач. капитал $\Downarrow$

то оптимальная страх. ставка имеет вид

оптимальная ставка большая

$$z_0 = A + d' + \Delta,$$

где $$d' = \frac{\xi(1+V^2)^{1/2} B}{n^{1/2}} - \frac{\rho}{n}, \qquad \Delta = \bar{\bar{o}}(N^{-1});$$

2) если

$$\xi(1+V^2)^{1/2} B n^{1/2} \le \rho \le \xi(1+V^2)^{1/2} B N^{1/2},$$

средний капитал

то оптимальная страх. ставка имеет вид

средняя ставка

$$z_0 = A + \Delta$$

3) если $\exists$ такое $\Theta'' > 1$, что

большой капитал

$$\rho \ge \Theta'' \xi (1+V^2)^{1/2} B N^{1/2},$$

то $\exists$ такое $N_3 = N_3(\Theta'')$, что при $N > N_3$ оптимальная страх. ставка имеет вид $z_0 = A$.

маленькая ставка

II. Предположим, что хотя бы одно из распр. F_S и F_X удовлетв. условию (C), а также что распред. F_S имеет конечный четвёртый момент. Тогда выполняется утв. I и, кроме того,
в случае 1) $\exists$ такое $N_1 = N_1(\Theta')$, что при $N > N_1$ для величина Δ справедлива оценка

$$0 < \Delta \le \frac{\Theta_3(F_S, F_X, Q)}{N^{3/2}},$$

а в случае 2) $\exists$ такое N_2, что указанная оценка для величины Δ вып-ся при $N > N_2$.

Теорема 5. Пусть $N \sim \mathrm{Pois}(\Lambda)$; задано некоторое Q, $1/2 < Q < 1$; положим $q = \Phi^{-1}(Q)$, $\xi = q + \eta(1-q^2)/\Lambda^{1/2}$,

$\lambda = \Lambda - \eta^2 w = \Lambda - \eta^2(1+V^2)$.

I. Предположим, что хотя бы одно из распределений F_S или F_X не явл-ся решётчатым, или распр. F_S явл-ся иррац.-решётч. Тогда

1) если $\exists$ такая абсолютная постоянная $\Theta' < 1$, что

$$\rho \le \Theta' \xi (1+V^2)^{1/2} B \lambda^{1/2},$$

то оптимальная страх. ставка имеет вид $z_0 = A + d' + \Delta$, где

$$d' = \frac{\xi(1+V^2)^{1/2} B}{\lambda^{1/2}} - \frac{\rho}{\lambda}, \quad \Delta = \bar{\bar{o}}(\Lambda^{-1});$$

2) если

$$\xi(1+V^2)^{1/2} B \lambda^{1/2} \le \rho \le \xi(1+V^2)^{1/2} B \Lambda^{1/2},$$

то оптимальная страх. ставка имеет вид $z_0 = A + \Delta$;

3) если $\exists$ такое $\Theta'' > 1$, что

$$\rho \ge \Theta'' \xi (1+V^2)^{1/2} B \Lambda^{1/2},$$

то $\exists$ такое $\Lambda_3 = \Lambda_3(\Theta'')$, что при $\Lambda > \Lambda_3$ оптимальная страх. ставка имеет вид $z_0 = A$.

II. Предположим, что хотя бы одно из распред. F_S и F_X удовлетв. условию (C), а также что распр. F_S имеет конечный четвёртый момент. Тогда выполняется утв. I и, кроме того, в случае

1) $\exists$ такое $\Lambda_1 = \Lambda_1(\Theta')$, что при $\Lambda > \Lambda_1$ для величины Δ справедлива оценка

$$0 < \Delta \le \frac{\Theta_4(F_S, F_X, Q)}{\Lambda^{3/2}},$$

а в случае 2) $\exists$ такое Λ_2, что указанная оценка для величины Δ выполняется при $\Lambda > \Lambda_2$.

§12. Гарантированные (верхние) оценки страховых тарифов для Ф-модели

27.03

Верхние оценки страховой ставки для детерминированного объёма страх. портфеля

Опр. Гарантированной (верхней) оценкой оптимальной ставки z_0 наз-ся величина z', для которой $z_0 \leq z'$ для всех значений объёма портфеля N.

Везде далее будем предполагать, что $S_j \leq C$ с вероятностью единица.

Лемма (неравенство Хёффдинга). Если $\xi_1, \dots, \xi_N$ – независимые с.в., удовлетворяющие условиям $\mathbb{E}\xi_j = 0$, $\xi_j \leq L$, $G^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbb{E}\xi_j^2}{N}$, то для всех t таких, что $0 \leq t < L$, справедливо неравенство

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_N > Nt) \leq \exp\left\{-\frac{NG^2}{L^2+G^2}\left(1+\frac{Lt}{G^2}\right)\ln\left(1+\frac{Lt}{G^2}\right) - \frac{NL^2}{L^2+G^2}\left(1-\frac{t}{L}\right)\ln\left(1-\frac{t}{L}\right)\right\};$$

если $t = L$, то нер-во остаётся справедливым с заменой правой части на её предел при $t \to L$:

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_N > Nt) \leq \left[\frac{G^2}{L^2+G^2}\right]^N$$

если $t > L$, то, очевидно, $\mathbb{P}(\xi_1 + .. + \xi_N > N_t) = 0$.

Пусть $W = R - r = \sum_{j=1}^{N} H_j$ – прибыль по данному страх. портфелю.

Тогда $\mathbb{E}W = Nh$, $\mathbb{D}W = Ng^2$, $\mathbb{E}R = r + Nh$, $\mathbb{D}R = Ng^2$;

$\mathbb{P}(R<0) = \mathbb{P}(W<-r)$ – вероятность разорения

$H_j = S_j(z - X_j) \geq -C(1-A)$ (п.н.) и эта граница достигается

при $S_j = C$, $z = A$, $X_j = 1$;

$W \geq -NC(1-A)$ (п.н.)

$\mathbb{P}(W<u) = 0$ при $u \leq -NL$, где $L = C(1-A)$;

$\mathbb{P}(W<u) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} H_j - Nh < u - Nh\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j > -u + Nh\right)$, где $\xi_j = h - H_j$

Таким образом, для оптимальной ставки премии

$$\mathbb{P}(R<0) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j > r + Nh\right) \leq 1 - Q$$

Заметим, что $\mathbb{E}\xi_j = 0$ и

$$\xi_j = S_j(X_j - z) + \mu(z-A) \le S_j(1-z) + \mu(z-A) \equiv \bar{\xi}_j(z)$$

Поскольку $\bar{\xi}_j(z)$ линейна по z и её максимум достигается на одном из концов отрезка $[A, 1]$:

$$\bar{\xi}_j(A) = S_j(1-A), \quad \bar{\xi}_j(1) = \mu(1-A),$$

получаем

$$\xi_j \le \bar{\xi}_j(z) \le L = C(1-A).$$

Заметим, что $h = \mu(z-A) \le L$ и $G^2 = g^2$.

Теорема 6.

При $N(h-L) < u \le Nh$

$$\mathbb{P}(W<u) \le \exp\left\{-\frac{Ng^2}{L^2+g^2}\left(1+\frac{Lt}{g^2}\right)\ln\left(1+\frac{Lt}{g^2}\right) - \frac{NL^2}{L^2+g^2}\left(1-\frac{t}{L}\right)\ln\left(1-\frac{t}{L}\right)\right\},$$

где $t = h - \frac{u}{N}$, $L = C(1-A)$;

если $u = N(h-L)$, то

$$\mathbb{P}(W<u) \le \left[\frac{g^2}{L^2+g^2}\right]^N;$$

если $u < N(h-L)$, то, очевидно, $\mathbb{P}(W<u) = 0$.

Следствие. При $0 \le r < N(L-h)$

$$\mathbb{P}(R<0) \le \exp\left\{-\frac{Ng^2}{L^2+g^2}\left(1+\frac{Lt}{g^2}\right)\ln\left(1+\frac{Lt}{g^2}\right) - \frac{NL^2}{L^2+g^2}\left(1-\frac{t}{L}\right)\ln\left(1-\frac{t}{L}\right)\right\},$$

где $t = h + \frac{r}{N}$, $L = C(1-A)$;

если $r = N(L-h)$, то

$$\mathbb{P}(R<0) \le \left[\frac{g^2}{L^2+g^2}\right]^N;$$

если $r > N(L-h)$, то, очевидно, $\mathbb{P}(R<0) = 0$.

Замечание

Применение ЦПТ позволяет получить оценку

$$\mathbb{P}(W<u) \asymp \Phi\left(\frac{u-Nh}{gN^{1/2}}\right)$$

Данная аппроксимация даёт меньшие значение вероятности разорения по сравнению с результатами следствия, но верна лишь для достаточно больших объёмов портфеля, в отличие от любых значений объёма портфеля, удовлетворяющих условиям теоремы 6, для которых справедливы результаты следствия.

Введём при $y>0$ и $0\le x<\frac{1}{y}$ функцию

$$U(x,y)=\exp\left\{-\frac{y^2}{1+y^2}\left(1+\frac{x}{y}\right)\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{1+y^2}(1-xy)\ln(1-xy)\right\},$$

доопределим по непрерывности

$$U\left(\frac{1}{y},y\right)=\frac{y^2}{1+y^2},\qquad U(x,0)=1,\quad x>0$$

Замечание.

Функция $U(x,y)$ убывает по x при $\forall$ фиксир. y и убывает по y при $\forall$ фиксир. x. Из этого, в частности, следует, что $U(x,y)\le 1$.

Определим функцию $S(p,y)$ как решение уравнения

$$U(S(p,y),y)=p,\qquad \frac{y^2}{(1+y^2)}\le p\le 1.$$

Заметим, что $S(p,y)$ определена однозначно, причём $S(1,y)=0$.

Теорема 7

Пусть $q=N\cdot S((1-Q)^{1/N},g_0/L)$. Если объём страх. портфеля удовлетв. условию

граница для вер-ти неразорения

коэфф-т вариации S

величина, ограничивающая

$L=C(1-A)$ прибыль по 1 договору

$$N>\max\left\{\frac{\ln(1-Q)}{\ln(g_0^2/L^2+g_0^2)},\ Vq\right\}, \qquad (*)$$

то оптимальная ставка премии z_0 удовлетв. нер-ву $z_0\le z'=\min\{A+d',1\}$, где величина d' при $\rho\le q(1+V^2)^{1/2}B$ определяется как

отн. нач. капитал маленький

$\Downarrow$

$$d'=\frac{[(N^2-q^2V^2)q^2(1+V^2)B^2+q^2V^2\rho^2]^{1/2}-N\rho}{N^2-q^2V^2},$$

d' - большая

$\Downarrow$

z' большая

$d'=0$ при $\rho>q(1+V^2)^{1/2}B$, т.е. $z_0=A$.

т.е. при достаточно большом относит. нач. капитале $d'=0$ и опт. ставка $=A$

денег мало - берем много, денег много - берём min из возможных

Замечание.

Величина Vq в правой части (*) зависит от N, однако можно показать, что $q \simeq N^{1/2}$. Таким образом, нер-во (*) заведомо выполняется начиная с некоторого $N_0 = N_0(Q, q_0, L, V)$.

Следствие.

Для оптимальной ставки премии имеет место оценка $z_0 \leq z' = A + d'$, где при $N \to \infty$

$$d' \simeq \left[2 \ln \frac{1}{1-Q}\right]^{1/2} \frac{(1+V^2)^{1/2} B}{N^{1/2}}$$

Замечание. Асимптотический порядок d' является "правильным" по N и совпадает, например, с порядком малости в теореме 1.

! на ГОСы

Верхние оценки страх. ставки для объема страхового портфеля, распределённого по закону Пуассона

Пусть

$S_j \leq C$ с вер-тью единица

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ - один. распр. с.в., $\mathbb{E}\xi_1 = a$, $\mathbb{D}\xi_1 = b^2$

N имеет пуасс. распред. с парам. Λ. $N \sim Pois(\Lambda)$

$N, \xi_1, \xi_2, \ldots$ - нез. с.в.

$S(\Lambda) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j$

Тогда $\mathbb{E} S(\Lambda) = \Lambda a$, $\mathbb{D} S(\Lambda) = \Lambda(a^2 + b^2) = G^2$

$\mathbb{E} W = \Lambda h$, $\mathbb{D} W = \Lambda(h^2 + g^2)$;

$\mathbb{E} R = r + \Lambda h$, $\mathbb{D} R = \mathbb{D} W$

Лемма.

Предположим, что $|\xi_1| \leq m$ (п.н.), где m - положит. постоянная. Тогда $\forall x \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S(\Lambda) - \Lambda a}{G} > x\right) \leq \exp\left\{-x^2 \frac{(1+\zeta)\ln(1+\zeta') - \zeta'}{\zeta^2}\right\},$$

где $\zeta = \frac{xm}{G}$, $\zeta' = \min\{\zeta, e-1\}$.

Для распред. суммарной прибыли имеем

$$\mathbb{P}(W < u) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} H_j - \Lambda h < u - \Lambda h\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j + \Lambda h > -u + \Lambda h\right),$$

где $\xi_j = -H_j$. При этом $\mathbb{E}\xi_j = -h$, $|\xi_j| = |H_j| \le C$, $G^2 = \Lambda \mathbb{E}\xi_1^2 = \Lambda(h^2+g^2)$. Для вер-ти разорения имеем

$$\mathbb{P}(R<0) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j + \Lambda h > r + \Lambda h\right) \le 1 - Q$$

Теорема 8. При $u \le \Lambda h$

$$\mathbb{P}(W<u) < \exp\left\{-\frac{\Lambda(h^2+g^2)}{C^2}\left[(1+J)\ln(1+J') - J'\right]\right\},$$

где $J = C(-u+\Lambda h)/(\Lambda(h^2+g^2))$, $J' = \min\{J, e-1\}$.

Следствие. При $r \geq 0$

$$\mathbb{P}(R<0) < \exp\left\{-\frac{\Lambda(h^2+g^2)}{C^2}\left[(1+J)\ln(1+J') - J'\right]\right\},$$

где $J = C(r+\Lambda h)/(\Lambda(h^2+g^2))$, $J' = \min\{J, e-1\}$.

Если $r + \Lambda h \geq (e-1)\Lambda(h^2+g^2)/C$, то

$$\mathbb{P}(R<0) < \exp\left\{(e-2)\frac{\Lambda(h^2+g^2)}{C^2} - \frac{\Lambda h}{C}\right\}\exp\left\{-\frac{r}{C}\right\}$$

Аналог нер-ва Лундберга

Если ∡ вер-ть разорения как ф-цию от нач. капитала, $\mathbb{P}(R<0) = C_1\exp\{-C_2 \cdot r\}$ было в диффуз. моделях и классич. моделей (Крамера-Лундберга). Здесь похожая структура

Замечание. Применение ЦПТ позволяет получить оценку

$$\mathbb{P}(W<u) \asymp \Phi\left(\frac{u - h\Lambda}{\sqrt{\Lambda(h^2+g^2)}}\right)$$

Данная аппроксимация даёт меньшие значения вер-ти разорения по сравнению с рез-тами следствия, но верна лишь для дост. больших Λ, в отличие от любых значений среднего числа договоров, удовлетворяющих условиям теоремы 8, для которых справедливы рез-таты следствия

Введём при $\omega \geq 0$ функцию

$$F(\omega) = \begin{cases} (1+\omega)\ln(1+\omega) - \omega & \text{при } 0 \le \omega \le e-1 \\ 2 - e + \omega & \text{при } \omega \geq e-1 \end{cases}$$

Замечание. Поскольку ф-ция $F(\omega)$ непр. и монот. возр., ф-ция $T(\omega)$, определенная как решение ур-ния

$$F(T(u)) = u, \quad u \geq 0$$

однозначно определена и монот. возр. Заметим, что $T(u) = u + e - 2$ при $u \geq 1$.

Теорема 9. Пусть

$$q = \frac{\Lambda g_0}{c} \cdot T\left(\frac{c^2}{\Lambda g_0^2} \ln\left(\frac{1}{1-Q}\right)\right)$$

Если среднее число договоров страх. Λ удовлетв. условию

$$\Lambda > q(1+V^2)^{1/2}, \qquad (**)$$

то оптим. ставка премии z_0 ~~удовлетв.~~ неравенству $z_0 \leq z' = A + d'$, где величина d' при $\rho \leq q(1+V^2)^{1/2} B$ определяется как

$$d' = \frac{\left[(\Lambda^2 - q^2(1+V^2))\, q^2(1+V^2) B^2 + q^2(1+V^2)\rho^2\right]^{1/2} - \Lambda\rho}{\Lambda^2 - q^2(1+V^2)},$$

$d' = 0$ при $\rho > q(1+V^2)^{1/2} B$, т.е. $z_0 = A$.

Замечание. Величина в правой части (**) зависит от Λ, однако можно показать, что $q \simeq \Lambda^{1/2}$. Таким образом, нер-во (**) заведомо выполняется начиная с некот. Λ_0, которое нетрудно определить численно.

Следствие.

Для оптимальной ставки премии имеет место оценка $z_0 \leq z' = A + d'$, где при $\Lambda \to \infty$

$$d' \simeq \left[2 \ln \frac{1}{1-Q}\right]^{1/2} \frac{(1+V^2)^{1/2} B}{\Lambda^{1/2}}$$

Замечание.

Асимптотический порядок d' является "правильный" по Λ и совпадает, например, с порядком малости в теореме 1.

Глава 3. Верхние оценки страховых ставок для факторизующих исков в дискретной динамической модели страхования

§13. Процесс риска Спарре Андерсена

Пусть

r – начальный капитал

Z_i – страх. взнос i-го клиента

$N_+(t)$ – число контрактов, заключённых за время $[0,t]$.

Тогда

$$R_+(t) = \sum_{i=1}^{N_+(t)} Z_i$$

– прирост капитала страх. компании за время $[0,t]$.

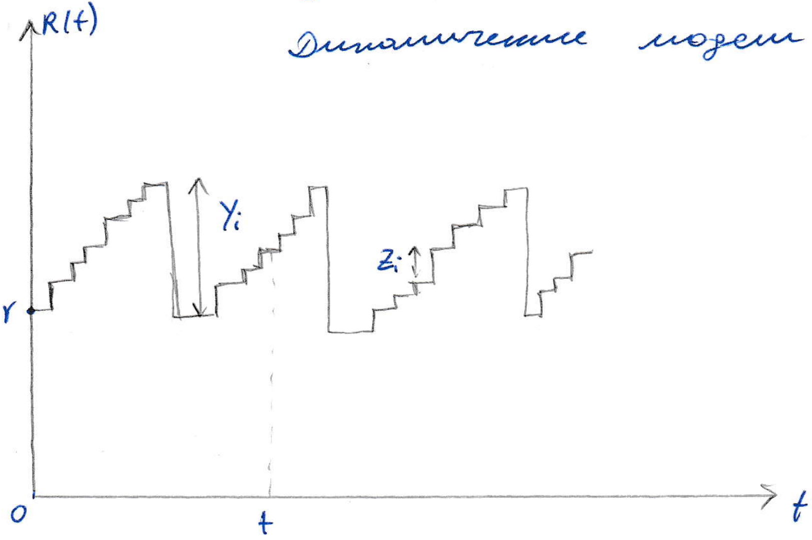
Пусть $0 \le T_1 \le T_2 \le \dots$ – моменты страх. выплат

$Y_1, Y_2, \dots$ – соответствующие размеры страх. выплат

Положим

$N_-(t) = \max\{n \mid T_n \le t\}$ – число страх. выплат за время $[0,t]$.

Тогда $R_-(t) = \sum_{i=1}^{N_-(t)} Y_i$ – суммарные потери страх. компании за время $[0,t]$.



Динамическая модель

Определим

$$R_d(t) = R_+(t) - R_-(t) = \sum_{i=1}^{N_+(t)} Z_i - \sum_{i=1}^{N_-(t)} Y_i, \quad t \geq 0$$

– динамическая компонента резерва страх. компании

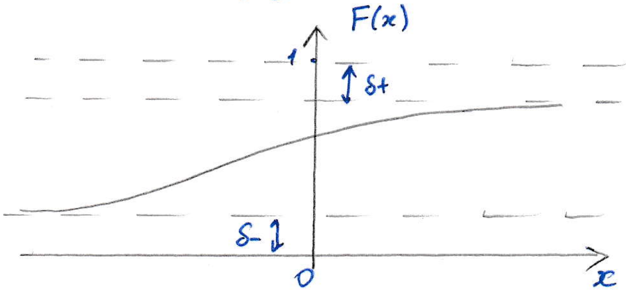
Опр. Процесс

$$R(t) = r + R_d(t) = r + \sum_{i=1}^{N_+(t)} Z_i - \sum_{i=1}^{N_-(t)} Y_i \quad , t \geq 0,$$

– наз-ся процессом риска.

Определим $\tau = \inf\{t \mid R(t) < 0\}$ – момент разорения.

Свойство: τ – несобственная («дефектная») с.в. : $\mathbb{P}(\tau < \infty) < 1$.



м.о. в обычном смысле ∄ (из графич. смысла легко понять)

Но: можем ∡ м.О как координату центра масс

мера Лебега ~ «длина»
Площадь, масса.
Температура – не мера. нагреваем 10 раз воду температуры +10°C ⇒ вода не становится +100°C!

$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty)$ = {обычно это 1−0, а тут (1−δ+) − δ−}

О несоб. распред. можно говорить о распределении масс < 1 в ∞ длинном стержне.
⇒ м.о в смысле центра масс работает, а классическое не определено

Опр. Величина

$\psi(r) = \mathbb{P}(\tau < \infty \mid R(0) = r)$ наз-ся вероятностью разорения на бесконечном промежутке времени при нач. капитале r.

Опр. Величина

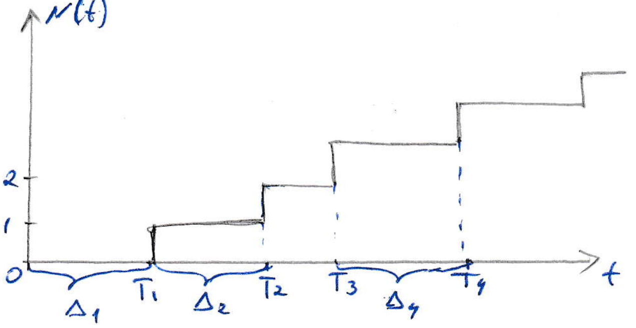
$\psi(t, r) = \mathbb{P}(\tau \leq t \mid R(0) = r)$ наз-ся вероятностью разорения на конечном промежутке времени $[0, t]$ при нач. капитале r.

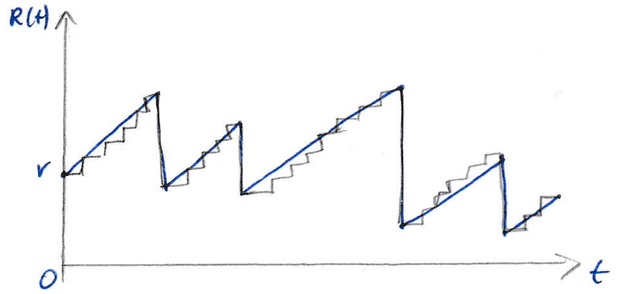
Определим

$\varphi(r) = 1 - \psi(r)$ – вероятность неразорения

Опр. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ – незав. неотриц. о.р.с.в. Случ. процесс $N(t) = \max\{n \mid \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \leq t\}$, $t \geq 0$ наз-я процессом восстановления.

Свойство: $\mathbb{E}N(t) \simeq \dfrac{t}{\mathbb{E}\Delta_1}$, $t \to \infty$. Пример: Пуассоновский, для него рав-во не асимптот., а =





Пусть

$Z_1, Z_2, \ldots$ — о.р.с.в.

$N_+(t), Z_1, Z_2, \ldots$ — нез. с.в. $\forall t \geq 0$

$N_+(t)$ — процесс восстановления

$\mathbb{E}Z_1 = b < \infty$ $\mathbb{E}N_+(t) \asymp \alpha_+ t$ ← интенсивность процесса восст.

Тогда $\mathbb{E}R_+(t) \asymp b\alpha_+ t \equiv ct$, $t \geq 0$

Пусть

Y_1, Y_2 — с.в. с общей ф.р. $F(x)$ и $\mu = \mathbb{E}Y_1 < \infty$;

$N_-(t), Y_1, Y_2, \ldots$ — нез. с.в. $\forall t \geq 0$

$N_-(t)$ — процесс восстановления

Опр. Процессом риска Спарре Андерсена наз-ся случ. процесс вида

$$R(t) = r + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0,$$

где $c > 0$, $N(t)$ — процесс восстановления, $Y_1, Y_2, \ldots$ — нез. с.в. с общей ф.р. $F(x)$ $(F(0) = 0)$, нез-мые от процесса $N(t)$.

Опр. Классическим процессом риска (процессом риска Крамера–Лундберга) наз-ся случ. процесс вида

$$R(t) = r + ct - \sum_{k=1}^{N_\lambda(t)} Y_k, \quad t \geq 0,$$

где $c > 0$, $N_\lambda(t)$ — пуассон. процесс с интенсивностью λ, $Y_1, Y_2, \ldots$ — нез. с.в. с общей ф.р. $F(x)$ $(F(0) = 0)$, нез-мые от процесса $N_\lambda(t)$.

§14. Определение и простейшие св-ва пуассоновского процесса.

Опр. Случ. процесс $\{N_\lambda(t), t \geq 0\}$ наз-ся пуассоновским, если он обладает след. свойствами:

- $N_\lambda(0) = 0$ (п.н.)
- $N_\lambda(t)$ – процесс с нез. приращениями, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ с.в. $N_\lambda(t_0), N_\lambda(t_1) - N_\lambda(t_0), \ldots, N_\lambda(t_n) - N_\lambda(t_{n-1})$ нез-мы
- $N_\lambda(t)$ – однор. процесс, т.е. $\forall s, t, h > 0$ с.в. $N_\lambda(t+h) - N_\lambda(t)$ и $N_\lambda(s+h) - N_\lambda(s)$ одинак. распределены

проц. леви

- при $h \downarrow 0$ и некотором $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(N_\lambda(h) = 0) = 1 - \lambda h + \bar{\bar{o}}(h)$$
$$\mathbb{P}(N_\lambda(h) = 1) = \lambda h + \bar{\bar{o}}(h)$$
$$\mathbb{P}(N_\lambda(h) \geq 2) = \bar{\bar{o}}(h)$$

Опр. Случ. проц. $\{N_\lambda(t), t \geq 0\}$ наз-ся пуассоновским, если он обладает след. св-вами

- $N_\lambda(0) = 0$ (п.н.)
- $N_\lambda(t)$ – процесс с нез. приращениями, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ с.в. $N_\lambda(t_0), N_\lambda(t_1) - N_\lambda(t_0), \ldots, N_\lambda(t_n) - N_\lambda(t_{n-1})$ нез-мы
- $N_\lambda(t)$ – однор. процесс, т.е. $\forall s, t, h > 0$ с.в. $N_\lambda(t+h) - N_\lambda(t)$ и $N_\lambda(s+h) - N_\lambda(s)$ одинак. распределены

пр. леви

- при нехот. $\lambda > 0$ $\quad \mathbb{P}(N_\lambda(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$

Свойство: $\mathbb{E} N_\lambda(t) = \mathbb{D} N_\lambda(t) = \lambda t$.

Опр. Параметр λ наз-ся интенсивностью пуассон. процесса

Распределение $N_\lambda(t)$ – ?

Пусть $\varphi_t(s) = \mathbb{E} s^{N_\lambda(t)}$, $|s| \leq 1$ – производящ. ф-ция $N_\lambda(t)$.

$\forall h > 0$ имеем

$$\varphi_{t+h}(s) = \mathbb{E} s^{N_\lambda(t+h)} = \mathbb{E} s^{N_\lambda(t+h) - N_\lambda(t) + N_\lambda(t)} = \mathbb{E} s^{N_\lambda(t)} \mathbb{E} s^{N_\lambda(t+h) - N_\lambda(t)} =$$
$$= \mathbb{E} s^{N_\lambda(t)} \mathbb{E} s^{N_\lambda(h)} = \varphi_t(s) \varphi_h(s).$$

При $h \downarrow 0$

$$\psi_h(s) = 1 - \lambda h + \bar{\bar{o}}(h) + s(\lambda h + \bar{\bar{o}}(h)) + \bar{\bar{o}}(h) = 1 + \lambda h(s-1) + \bar{\bar{o}}(h)$$

Следовательно, при $h \downarrow 0$

$$\psi_{t+h}(s) = \psi_t(s)(1 + \lambda h(s-1) + \bar{\bar{o}}(h));$$

$$\frac{\psi_{t+h}(s) - \psi_t(s)}{h} = \lambda(s-1)\psi_t(s) + \bar{\bar{o}}(1)$$

$$\frac{\partial \psi_t(s)}{\partial t} = \lambda(s-1)\psi_t(s)$$

$$\psi_t(s) = C\exp\{\lambda t(s-1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}s^k;$$

$$\mathbb{P}(N_\lambda(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$ — производ. ф-ция пуас. распр.

=> последние 2 определения эквивалентны

Утв. Условное совместное распределение n точек скачков пуассоновского процесса на отрезке $[a,b]$ при условии $N_\lambda(b) - N_\lambda(a) = n$ совпадает с совместным распределением вариационного ряда, построенного по выборке объема n из равномерного распределения на отрезке $[a,b]$.

Свойство: распред. интервалов времени между соседними скачками пуассон. процесса является показательным с параметром λ.

Утв. $\forall \lambda > 0, t > 0$

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{N_\lambda(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_{ит}}{\sqrt{\lambda t}}$$

§15. Дискретная динамическая факторизационная модель страхования

Пусть

$N(t)$ — процесс восстановления;

интервалы между выплатами $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$ одинаково распределены и нез-мы в совокупности с величинами исков Y_i.

Рассмотрим процесс риска Спарре Андерсена

$$R(t) = r + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0.$$

Величина $R(t)$ в момент времени $T_i = \Delta_1 + \ldots + \Delta_i$ может быть записана как

$$R(T_i) = R(T_{i-1}) + c\Delta_i - Y_i, \qquad R(T_0) = r.$$

Замечание. Последовательность $R_i = R(T_i)$ представляет собой случ. блуждание, порожденное величинами $c\Delta_i - Y_i$. Таким образом, изучение вер-ти разорения

$$\psi(r) = \mathbb{P}(\min_i R_i < 0 \mid R_0 = r)$$

яв-ся задачей о вер-ти пересечения случ. блужданием $\{R_i\}$ нулевого уровня.

Замечание. Представление

$$R(T_i) = R(T_{i-1}) + c\Delta_i - Y_i \equiv R_{i-1} + H_i, \qquad R(T_0) = r,$$

не может быть использовано для факторизуемых исков напрямую, поскольку в динамических моделях процесс поступления премий считается независимым от отдельных выплат в отличие от факторизационной модели, в которой премии и выплаты по конкретному договору всегда яв-ся зависимыми.

Замечание. Таким образом, представление

$$R_i = R_{i-1} + H_i, \qquad R_0 = r,$$

где H_i — разности между премиями, поступившими за время $[T_{i-1}, T_i]$, и выплатами Y_i в моменты времени T_i, можно изучать при помощи Ф-модели только в том случае, когда R_{i-1} и H_i являются независимыми, что, в свою очередь, возможно лишь в случае, когда после каждого момента времени T_i действие ранее заключённых договоров считается завершённым, т.е. рассматриваются не моменты выплат, а "более редкие" моменты времени T_i, и в очередной период $[T_i, T_{i+1}]$ страховщик входит, имея лишь накопленный за время $[0, T_i]$ страховой фонд R_i.

Опр. Назовём *тест-периодом* промежуток времени Δ, в течение которого в страховой фонд страховщика поступают премии, связанные с заключением договоров страхования, и производятся выплаты по страховым искам. Считается, что во время тест-периода страховщик может пользоваться беспроцентными краткосрочными кредитами для осуществления выплат. По итогам деятельности страховщика за тест-период делается вывод либо о неплатежеспособности (итоговом разорении), либо о продолжении страх. деятельности на очередной тест-период. В качестве примера тест-периода может рассматриваться естественный промежуток времени — один год.

Опр. *Вероятностью разорения* страховщика в данном случае будем называть вер-ть наступления неплатёжеспособности по итогам хотя бы одного тест-периода.

§16. Постановка задачи определения оптимальной страховой ставки в дискретной динамической модели страхования

Замечание. Везде далее под оптимальной ставкой премии z_0 будем понимать ставку, обеспечивающую необходимую вероятность неразорения не за один тест-период, как это делалось ранее, а в течение бесконечного числа тест-периодов.

Будут рассматриваться гарантированные оценки оптимальной ставки для следующих ситуаций:

1) распределение прибыли страховщика W за любой тест-период считается нормальным с заданными моментами;

2) без предположений о распределении W, но с учётом равномерной ограниченности страховых сумм.

Пусть

N_k – число договоров, заключённых за k-й тест-период,

$N \overset{d}{=} N_k$, $\Lambda = \mathbb{E}N$, $M^2 = \mathbb{D}N$,

$Y_{k,j} = S_{kj} X_{kj}$ – фактические иски;

$X \overset{d}{=} X_{kj}$, $S \overset{d}{=} S_{kj}$;

$A = \mathbb{E}X$, $B^2 = \mathbb{D}X$, $\mu = \mathbb{E}S$;

$V = \sqrt{\mathbb{D}S/\mu^2} < \infty$ – коэфф. вариации S;

$W_k = \sum\limits_{j=1}^{N_k} H_{kj}$, где $H_{kj} = S_{kj}(z - X_{kj})$ – суммарная прибыль страховщика за k-й тест-период;

$r = \mu\rho$ – начальный капитал страховщика

Тогда страховой фонд за k послед-ных тест-периодов составит

$R_k = r + \Omega_k$,

где $\Omega_k = W_1 + \ldots + W_k$, прибыли W_k нез-мы и распределены так же, как W.

Случ. послед-ть $\{\Omega_k\}$ является процессом с нез-ыми приращениями;

вероятность $\psi(r, z)$ наступления события $\{R_k < 0\} =$
$= \{\Omega_k < -r\}$ хотя бы для одного $k = 1, 2, \ldots$ является

вероятностью разорения страховщика в дискретной динамической модели за бесконечное время:

$\psi(r, z) = \mathbb{P}(R_\kappa < 0) = \mathbb{P}(\Omega_\kappa < -r)$. ? м.б. опечатка

Замечание. При каждом фикс. r ф-ция $\psi(r, z)$ монотонна по z, т.е. если

$\psi(r, z') \leq \varepsilon$,

то это нер-во выполняется и для всех $z > z'$!

Опр. Будем говорить, что z_0 — оптимальная страх. ставка, если

$z_0 = \inf\{z \mid \psi(r, z) \leq \varepsilon \equiv 1 - Q,\ z \geqslant A\}$,

где $Q < 1$ — допустимое для страховщика значение вер-ти неразорения.

Лемма (аналог нер-ва Лундберга)

Пусть ф-ция $U(s) = \mathbb{E}\exp\{-sW\}$ конечна на некот. интервале $s \in [0, s')$. Если на этом интервале $\exists$ решение $s = s_0 > 0$ уравнения $U(s) = 1$, то справедлива оценка

$\psi(r, z) \leq \exp\{-s_0 r\}$.

Если дополнительно известно, что $\lim\limits_{s \to s'} U(s) > 1$, то ур-ние $U(s) = 1$ заведомо имеет положительный корень.

Оценки страховых ставок в дискретной динамической модели страхования при нормальном распределении прибыли за тест-период

Пусть W имеет норм. распред. с ~~параметрами~~ моментами $\alpha = \mathbb{E}W = \Lambda h$ и $\beta^2 = \mathbb{D}W = \Lambda g^2 + M^2 h$; $\omega = V^2 + \dfrac{M^2}{\Lambda}$

Теорема 10.

~~Если~~ Пусть W имеет норм. расп., ~~то~~ $\forall$ фикс. значение Q $(0 < Q < 1)$ в случае, если начальный капитал удовлетв. условию

$$\rho > \frac{\omega(1-A)^2 + (1+V^2)B^2}{2(1-A)} \ln\frac{1}{1-Q},$$

оптимальная страх. ставка z_0 удовлетв. нер-ву $z_0 \leq z' = A + d'$, где

$$d' = \frac{2(1+V^2)B^2}{\rho x + [\rho^2 x^2 - 4w(1+V^2)B^2]^{1/2}}, \qquad x = \frac{2}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$$

Оценки страх. ставок в дискретной динамической модели страхования при равномерно ограниченных страх. суммах

Пусть $S_j \le C$ (п.н.).

Определим $E(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x}$.

При $x=0$ доопределим по непр-сти $E(0)=0$. Заметим, что при $x \to 0$ имеет место $E(x) \simeq \frac{x}{2}$.

Замечание. Функция $E(x)$ строго монотонно и неограниченно возрастает при $x \ge 0$. Следовательно, обратная функция $G(y) = E^{-1}(y)$ однозначно определена при $y \ge 0$.

Теорема 11.

1. Вероятность разорения при $0<z<1$ удовлетворяет нер-ву

$$\psi(r,z) \le \exp\left\{-\frac{G(v)r}{C}\right\}, \qquad \text{где } v = \frac{Ch}{h^2+g^2}$$

2. $\forall$ значения Q $(0<Q<1)$ в случае, если нач. капитал r удовлетворяет условию

$$E\left(\frac{C}{r}\ln\frac{1}{1-Q}\right) < \frac{C(1-A)}{\mu(1+V^2)[(1-A)^2+B^2]},$$

оптимальная страх. ставка z_0 удовлетворяет неравенству $z_0 \le z' = A + d'$, где

$$d' = \frac{2(1+V^2)B^2}{\rho q + [\rho^2 q^2 - 4(1+V^2)B^2]^{1/2}}, \qquad q = \frac{C}{\mu E\left(\frac{C}{r}\ln\frac{1}{1-Q}\right)}.$$

Замечание. Можно показать, что в условиях теорем 10 и 11 при $r \to \infty$

$$z' \simeq A + \frac{(1+V^2)\mu B^2}{2r}\ln\frac{1}{1-Q}.$$

Это означает, что с ростом нач. капитала r разница между моделями "стирается".

Семинар, 17.04.

50% от max баллов набрать

① Найти м.о., дисперсию, х.ф., Все с.в. и прир. нез-ти.

•) $N(t)$ – пр. Кокса, $N(t) = N_1(\Lambda(t))$, $\Lambda(t)$ – пуас. процесс с интенсивностью 2.

N_1 – станд. пуассон. процесс

$$\mathbb{E}\xi = \sum \mathbb{E}(\xi \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}N_1(\Lambda(t)) = \mathbb{E}N_1(N_2(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(N_1(N_2(t) \mid N_2(t)=n) \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=n) =$$

$$\mathbb{E}\underbrace{\mathbb{E}(N_1(N_2(t)) \mid N_2(t))}_{g}$$

← это не надо

Опр. 1) g измерима отн-но $\sigma(N_2(t))$

2) $\int_B \mathbb{E}(N_1(N_2(t)) \mid N_2(t)\, d\mathbb{P} = \int_B N_1(N_2(t))\, d\mathbb{P} \quad \forall B \in \sigma(N_2(t))$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(N_1(n) \mid N_2(t)=n) \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=n) \overset{\text{нез-ть}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}N_1(n)}_{1 \cdot n} \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=n) = \{\mathbb{E}N_2(t) = 2t\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot n \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=n) = \mathbb{E}N_2(t) = \underline{2t}$$

•) $\mathbb{E}N_1(N_1(t))$ – не суперпозиция нез-мых процессов, а процесс сам от себя. Вот тут можно попробовать определение выше.

$$\mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}(N(t))^2 - (\mathbb{E}N(t))^2 = (4t+4t^2) - 4t^2 = \underline{4t} = 2t + 2t$$

$\mathbb{E}\Lambda(t) + \mathbb{D}\Lambda(t)$

$$\mathbb{E}(N(t))^2 = \mathbb{E}(N_1(N_2(t)))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}((N_1(N_2(t)))^2 \mid N_2(t)=n) \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}((N_1(n))^2 \mid N_2(t)=n) \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=n) \overset{\text{нез-ть}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(N_1(n))^2 \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+n^2)\, \mathbb{P}(N_2(t)=n) = \mathbb{E}N_2(t) + \mathbb{E}(N_2(t))^2 = 2t + (2t+4t^2) = 4t + 4t^2$$

Для пр. Кокса $\quad \mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}\Lambda(t) + \mathbb{D}\Lambda(t)$

хар. ф-ии

$$\mathbb{E}e^{isN(t)} = \mathbb{E}e^{isN_1(N_2(t))} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}e^{isN_1(k)} \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k(e^{is}-1)} \cdot \mathbb{P}(N_2(t)=k) =$$

$$= \mathbb{E}e^{N_2(t)(e^{is}-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k(e^{is}-1)} \cdot e^{-2t} \cdot \frac{(2t)^k}{k!} = e^{-2t} \cdot e^{2t \cdot e^{e^{is}-1}} =$$

$$= e^{2t(e^{e^{is}-1}-1)}$$

•) ~~$N(t) = N_\lambda(\Lambda t), \quad \Lambda = \begin{cases} 1, & 1/3 \\ 2, & 2/3 \end{cases}$~~

•) $N(t) = \sum\limits_{k=1}^{N_\lambda(\Lambda t)} X_k, \qquad \Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta), \; X_k \sim exp(\delta)$

$\xi \sim \Gamma(\underset{\text{форма}}{\alpha}, \underset{\text{масштаб}}{\beta})$ $\Rightarrow$ $\boxed{p_\xi(x) = \frac{x^{(\alpha-1)} \beta^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \; x > 0}$

$\Gamma(1, \beta) = exp(\beta)$

$p_\xi(x) = \frac{x^{(\alpha-1)} \beta^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$

$$\mathbb{E} N(t) = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{N_\lambda(\Lambda t)} X_k \overset{\text{усл по } \Lambda}{=\!=} \int_0^\infty \mathbb{E} \sum_{k=1}^{N_\lambda(yt)} X_k \, d\mathbb{P}(\Lambda < y) = \{\text{расписали плотность}\} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\mathbb{E} \sum_{k=1}^{N_\lambda(yt)} X_k\right) \frac{y^{(\alpha-1)} \beta^\alpha e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha)} dy = \{\text{усредняем по } N\} =$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\sum_{n=0}^\infty \overbrace{\mathbb{E} \sum_{k=1}^{n} X_k}^{\mathbb{E} n X_k = n \cdot \mathbb{E} X_k} \cdot \mathbb{P}(N_\lambda(yt) = n)}_{\mathbb{E} X_k \cdot \mathbb{E} N_\lambda(yt)} \frac{y^{(\alpha-1)} \beta^\alpha e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha)} dy = \{X_k \sim exp(\delta)$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{E} X_k}_{\frac{1}{\delta}} \cdot \underbrace{\mathbb{E} N_\lambda(yt)}_{\lambda t} \frac{y^{(\alpha-1)} \beta^\alpha e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha)} dy = \int_0^\infty \frac{1}{\delta} \lambda t \cancel{y} \frac{y^{\cancel{\alpha-1}} \beta^\alpha e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha)} dy =$$

$$= \frac{\lambda t}{\delta \, \Gamma(\alpha) \cdot \beta} \int_0^\infty (\beta y)^\alpha e^{-\beta y} d(\beta y) = \frac{\lambda t}{\delta \Gamma(\alpha) \cdot \beta} \cdot \Gamma(\alpha + 1) = \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha \right\} =$$

$$= \frac{\lambda \cdot t \cdot \alpha}{\delta \beta}$$

$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!, \; \alpha \in \mathbb{Z}_+$

$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0$

$$\mathbb{E} e^{is\sum_{k=1}^{N_\lambda(\Lambda t)} X_k} = \int_0^\infty \mathbb{E} e^{is\sum_{k=1}^{N_\lambda(yt)} X_k} \, d\mathbb{P}(\Lambda < y) \overset{㊀}{=} \int_0^\infty e^{\lambda y t\left(\frac{\delta}{\delta - is} - 1\right)} \frac{y^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha)} dy =$$

$$= \int_0^\infty e^{-y\left(\beta - \lambda t\left(\frac{\delta}{\delta - is} - 1\right)\right)} \cdot \frac{y^{\alpha-1}\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dy \underset{\uparrow}{=} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\left(\beta - \lambda t\left(\frac{\delta}{\delta - is} - 1\right)\right)^\alpha} \Gamma(\alpha) =$$

приводим к виду

$$\int_0^\infty (\Delta y)^{\alpha-1} e^{-\Delta y} d(\Delta y)$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta - \lambda t\left(\frac{\delta}{\delta - is} - 1\right)}\right)^\alpha$$

(*) N_γ пуасс.

$$\mathbb{E} e^{is\sum_{k=1}^{N_\gamma} X_k} = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E} e^{is\sum_{k=1}^{n} X_k} \mathbb{P}(N_\gamma = n) = \left\{ X_k \text{ - нез} \Rightarrow \text{х.ф. суммы} = \text{произведение х.ф.} \to n\text{-ая степень} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\delta}{\delta - it}\right)^{ⓝ} \cdot e^{-\gamma} \frac{\gamma^{ⓝ}}{n!} = e^{-\gamma} \cdot e^{\gamma \frac{\delta}{\delta - it}} = \{\gamma = \lambda y t\}$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} = e^z$$

•) $N(t) = N_\lambda(\Lambda t)$, $\Lambda = \begin{cases} 1, & 1/3 \\ 2, & 2/3 \end{cases}$

$$\mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}N_\lambda(\Lambda t) = \mathbb{E}N_\lambda(t) \cdot \mathbb{P}(\Lambda = 1) + \mathbb{E}N_\lambda(2t) \cdot \mathbb{P}(\Lambda = 2) =$$

$$= \mathbb{E}N_\lambda(t) \cdot \frac{1}{3} + \mathbb{E}N_\lambda(2t) \cdot \frac{2}{3} = \frac{\lambda t}{3} + \frac{2t \cdot 2}{3} = \frac{5\lambda t}{3}$$

$$\mathbb{E} e^{isN(t)} = \frac{1}{3} \cdot e^{\lambda t(e^{is} - 1)} + \frac{2}{3} e^{2\lambda t(e^{is} - 1)} = \mathbb{E} e^{isN_\lambda(\Lambda t)} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E} e^{isN_\lambda(t)} + \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E} e^{isN_\lambda(2t)}$$

$$\mathbb{E} N_1(N_2(N_3(4t))) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (4t) = 24t = \sum_{n=0}^\infty \underbrace{\mathbb{E}(N_1(N_2(n)))}_{1 \cdot 2 \cdot n} \mathbb{P}(N_3(4t) = n) = 1 \cdot 2\, \mathbb{E}N_3(4t)$$

$$\mathbb{E} e^{is N_1(N_2(N_3(4t)))} = e^{3 \cdot 4t\,\left(e^{2\left(e^{(e^{is}-1)} - 1\right)} - 1\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \underbrace{\mathbb{E} e^{is N_1(N_2(n))}} e^{-12t} \frac{(12t)^n}{n!}$$

$$\shortparallel \sum_{m=0}^\infty \mathbb{E} e^{isN_1(m)} \frac{(2n)^m}{m!}$$

$$\mathbb{E} e^{is N_3(N_5\underline{(N_7}(\vartheta t)))} = e^{\vartheta t \cdot 7(e^{5(e^{3(e^{is}-1)}-1)}-1)}$$

Показать:

$$N_\alpha(N_\beta(t)) \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{N_\gamma(t)} X_j \quad , \quad X_j \overset{d}{=} N_\delta(1)$$

1) х.ф. левой части

2) х.ф. правой части

если производящая, то здесь z

$$e^{\beta t(e^{\alpha(e^{is}-1)}-1)} = e^{\gamma t(e^{\delta(e^{is}-1)}-1)}$$

$\beta = \gamma$

$\alpha = \delta$

на сд-ть не решать, а так можно сильно порешать